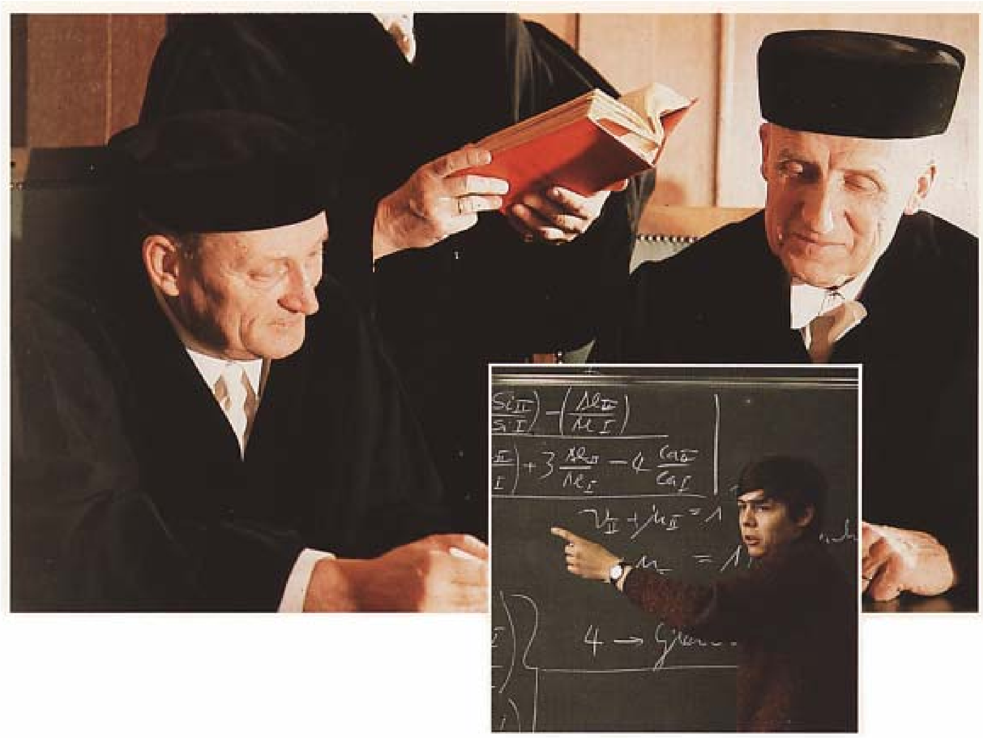
Fallstudie



was zu beweisen war

oder: Wie sicher ist die Mathematik?

Albert A. Gächter

Zu dieser Fallstudie

Im täglichen Leben ist es nicht üblich, jede Aussage zu beweisen. Das Zusammenleben wäre unerträglich. Für eine sinnvolle Kommunikation benötigen wir eine breite Vertrauensbasis. Wir verlangen meistens erst dann Beweise, wenn wir meinen, berechtigte Gründe für Zweifel und Misstrauen zu besitzen. Im Umgang mit Behörden erhöht sich die Beweispflicht bereits erheblich: es werden Belege, Unterschriften, eidesstattliche Erklärungen etc. gefordert. Wissenschaftliches Arbeiten setzt klare Begriffe und eine spezifische Art der Begründung von Aussagen voraus. Ein Jurist argumentiert anders als ein Mathematiker, ein Chemiker wiederum anders als ein Historiker. Mathematische Beweise gründen sich nicht auf Meinungen oder Ansichten, die man laufend ändern kann. Aber auch nicht auf Experimente, welche stets in Gefahr sind, durch neu entdeckte Tatsachen umgestossen zu werden. Ein Beweis in der Mathematik geht von etwas als wahr Erkanntem aus und führt auf eine neue Aussage. Im Idealfall erfüllt ein mathematischer Beweis mehrere Zwecke:

1. Die Überprüfung und Kritik durch ein stets neues Publikum schliesst Irrtümer praktisch aus. Damit wird der Beweis zu einem Stück Autorität.
2. Er vermittelt mehr Einsicht in eine Theorie und trägt zu einem tieferen Verständnis von Begriffen, Verfahren und der gegenseitigen Abhängigkeit von Sätzen bei.
3. Es geht beim Beweisen nicht nur um die Sicherung des Wissens, sondern um die Erschliessung neuer mathematischer Zusammenhänge.
4. Er macht deutlich, dass die Tätigkeit des Beweisens nicht einfach ein Ritual oder eine Fliessbandarbeit ist, sondern ästhetisches Empfinden und schöpferische Intuition schult.

Ist das Beweisbedürfnis einmal geweckt, entpuppt sich das Studium oder Suchen von Beweisen als eine anspruchsvolle Tätigkeit. Beweise tragen verschiedene Handschriften. Eines ist ihnen allen aber gemeinsam. Sie beantworten die Frage: **Was wissen wir in der Mathematik und wie wissen wir es?**

Völlige Sicherheit ist im Alltag unerreichbar. Dies bedeutet, dass wir Risiken auf uns nehmen müssen, um nicht vor Angst gelähmt zu werden. In unserer Gesellschaft arbeiten wir daran, mögliche Gefahren zu kennzeichnen und durch Regeln und Gesetze die Sicherheit jedes Bürgers zu erhöhen. Resultate dieser Bemühungen sind das öffentliche und zivile Recht. Immer wieder kommt es in unserem Rechtsstaat zu spektakulären Prozessen mit langwierigen Beweisverfahren.
Was versteht man in der Jurisprudenz aber unter "beweisen"? Gibt es Parallelen zum mathematischen Beweis? Im Rahmen dieser Fallstudie können Sie solchen Fragen nachgehen.

"Einer muss behaupten, damit andere zu denken beginnen."

"Ein durchgreifender Advokat in einer gerechten Sache, ein durchdringender Mathematiker vor dem Sternenhimmel erscheinen beide gleich gottähnlich." (Goethe)

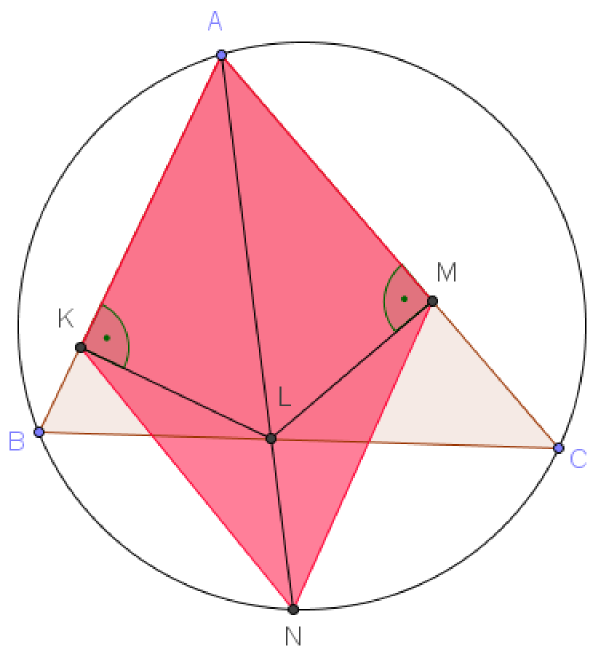
"Der einzige Beweis des Könnens ist das Tun." (M.v.Ebner-Eschenbach)

Aufgabe

Lösen Sie eine der folgenden Aufgaben:

1. Am diesjährigen regionalen Mathematikwettbewerb befindet sich unter den gestellten Problemen diese geometrische Beweisaufgabe:

   ABC sei ein spitzwinkliges Dreieck. Die Halbierende des Innenwinkels bei A schneidet die Seite BC in L und den Umkreis des Dreiecks in N(N≠A).
   Seien K und M die Fusspunkte der Lote von L auf AB bzw. AC.
   Man beweise: Die Flächeninhalte des Vierecks AKNM und des Dreiecks ABC sind gleich.



Sie sind für die Korrektur und Beurteilung einiger Lösungen zuständig (vergleiche Dokument 1).

- Worauf stützen sich die einzelnen Beweisvorschläge?
- Welcher Beweis überzeugt Sie am meisten, welcher am wenigsten? Begründen Sie Ihre Ansicht vor der Jury.
- Die Jury vergibt Sonderpreise für die elegantesten Lösungen. Welchen Beweis schlagen Sie vor?

2. Was versteht die Rechtssprechung unter einem Beweis? Stellen Sie die Argumentationsweise der Juristen und Mathematiker einander gegenüber.

"Four colors suffice" ("Vier Farben genügen"). Diese Meldung stempelte die Universität von Illinois im Jahre 1976 allen abgehenden Sendungen auf. Der Grund: Kenneth Appel und Wolfgang Haken bestätigten mit Hilfe eines Computers die berühmte Vierfarben-Vermutung. Die bis dahin ungewohnte Beweismethode löste weltweit eine hitzige Kontroverse aus. Was macht einen Beweis zu einem Beweis und was bedeutet mathematische Strenge? Hat die Tätigkeit eines Computers Beweiskraft? Verhindern die riesige Rechenzeit von über 1200 Stunden und der grosse finanzielle Aufwand nicht die bisher wichtige Forderung der Nachprüfbarkeit durch andere? Mittlerweile haben sich die Wogen geglättet, nachdem der Computer mit Erfolg für die Behandlung weiterer hartnäckiger Probleme eingesetzt werden konnte. Es zeigt sich, dass Felix Klein (1849-1925) mit seinem Ausspruch ins Schwarze trifft: "Aus der Betrachtung der Geschichte unserer Wissenschaft ergibt sich nämlich, dass 'Strenge' bei alledem etwas Relatives ist, eine Forderung, die sich mit der fortschreitenden Entwicklung erst entwickelt. Es ist interessant zu beobachten, wie in einer auf Strenge gerichteten Periode die Zeitgenossen jedes Mal glauben, das Maximum in dieser Richtung geleistet zu haben, und wie dann noch eine spätere Generation in ihren Forderungen und Leistungen über sie hinwegschreitet. So wurde Euklid überholt, so Gauss, so Weierstrass."

Seit den Zeiten Euklids gehört es zur mathematischen Methode, dass Aussagen bewiesen werden. Mit der formalen Logik wurde ein Instrument entwickelt, um Beweise auf Genauigkeit und Lückenlosigkeit zu untersuchen. Mathematik ist aber kein lebloses Spiel mit Definitionen, Axiomen und Sätzen, das problemlos auch von einem Computer gespielt werden könnte. Schöpferische Intuition bildet die treibende Kraft für jede mathematische Leistung. Kein Wunder, dass Fehltritte vorkommen und sogar Grundlagenkrisen das Gebäude der Mathematik erschüttern. Es mag beruhigend sein zu sehen, dass die Fundamente dieser Wissenschaft, welche wegen ihrer Exaktheit und Sicherheit hohes Ansehen geniesst, heute ebenso diskutiert und in Frage gestellt werden wie in jeder andern Wissenschaft.

Fallmaterial

Dokument 1 enthält Lösungsvorschläge zur Aufgabe 1 der Fallstudie. Diese Beweisaufgabe stammt von der 28. Internationalen Mathematik-Olympiade in Havanna. Von diesem Wettbewerb wurden auch folgende Lösungen ins Dokument 1 aufgenommen: A und B von Martin Lauer und D von Jörg Eisfeld aus Deutschland.

Die zur Aufgabe 2 der Fallstudie passenden Dokumente können leider aus Copyright-Gründen hier nicht kopiert werden. Die Lehrperson tut ohnehin gut daran, aktuelle Beispiele auszuwählen und den Schwierigkeitsgrad der Klasse anzupassen.

Vorschläge:

Davis P. und Hersh R.: Erfahrung Mathematik. Basel 1986 (Birkhäuser).
Ausschnitt.

Descartes R.: Abhandlung über die Methode des richtigen Vernunftgebrauchs und der wissenschaftlichen Wahrheitsforschung. Stuttgart 1977 (Reclam). Ausschnitt.

Fritsch R.: Wie wird der Vierfarbensatz bewiesen? In: Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht. 43 (1990), Heft 2. Ausschnitt.

Gesetzessammlung des Kantons St.Gallen: Gesetz über die Zivilrechtspflege. Neudruck 1987. Ausschnitt.

Hofstadter D. R.: Gödel, Escher, Bach. Stuttgart 1985 (Klett-Cotta). Ausschnitt.

Kummer M.: Grundriss des Zivilprozessrechts. Bern 1972 (Stämpfli). Ausschnitt.

Neue Zürcher Zeitung: Fragen nach dem Urteil im Kehrsatzer Mordfall. Zürich 3. 5. 1990.

Neufeld P. und Colman N.: Wissenschaft im Zeugenstand. In: Spektrum der Wissenschaft. 13 (1990), Heft 7. Ausschnitt.

Polya G.: Mathematik und plausibles Schliessen. 2 Bände. Basel 1962 (Birkhäuser). Ausschnitte.

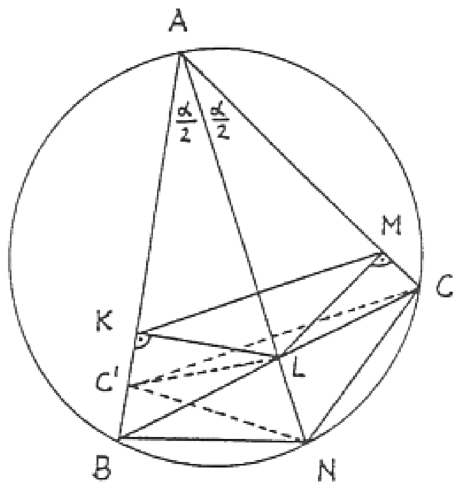
St.Galler Tagblatt: Jeder Beweis kann ein Problem sein. St.Gallen 4. 4. 1990.

Ulmer K.: Die Wissenschaften und die Wahrheit. Stuttgart 1966 (Kohlhammer). Ausschnitt.

Beweis:

A

OBdA sei $|AC| \leqq |AB|$. Eine Spiegelung an AN (siehe Figur) überführt K in M, da Δ AKL und Δ AML kongruent sind ($\sphericalangle AKL = \sphericalangle AML$, $\sphericalangle KAL = \sphericalangle LAM$, $|AL| = |AL|$).
Deswegen stehen KM und AN senkrecht aufeinander. Wegen $\sphericalangle AKL = \sphericalangle AML = 90°$ ist $\overline{AL}$ Durchmesser des Umkreises von AKLM und es ist $|KM| = |AL| \sin\alpha$. Es ergibt:



$$F(AKNM) = \frac{1}{2}|AN|\cdot|KM|$$
$$= \frac{1}{2}|AN|\cdot|AL|\cdot\sin\alpha,$$
$$F(ABC) = \frac{1}{2}|AB|\cdot|AC|\cdot\sin\alpha.$$

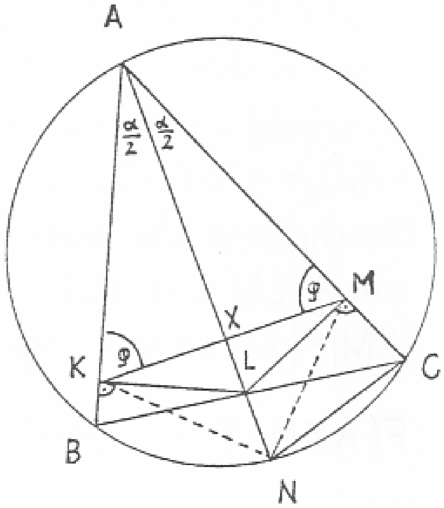
Es ist noch zu zeigen, dass $|AN|\cdot|AL| = |AB|\cdot|AC|$ ist. Es sei C' der Bildpunkt von C bei Spiegelung an AN. Deswegen ist $|AC'| = |AC|$ und $\sphericalangle NC'L = \sphericalangle NCL$. Da AN den Winkel α halbiert, ist $\widehat{BN} = \widehat{NC}$ und daher Δ BNC gleichschenklig. Also ist $\sphericalangle NBL = \sphericalangle NCL$. Daher gilt $\sphericalangle NC'L = \sphericalangle NCL = \sphericalangle NBL$, und BNLC' ist ein Sehnenviereck. Die Potenz von A auf dessen Umkreis ist $|AN|\cdot|AL| = |AB|\cdot|AC'|$. Wegen $|AC'| = |AC|$ folgt daraus $|AN|\cdot|AL| = |AB|\cdot|AC|$.

qed.

Beweis:

B

Da L auf der Winkelhalbierenden von α liegt, ist $|LK| = |LM|$. Da ΔKLM gleichschenklig ist, gilt (siehe Figur):



$\sphericalangle LKM = \sphericalangle LMK \Rightarrow$

$\sphericalangle AKM = 90° - \sphericalangle MKL =$

$= 90° - \sphericalangle LMK = \sphericalangle AMK = \varphi$.

Dann ist $\sphericalangle KXA = 180° - \frac{\alpha}{2} - \varphi =$

$= \sphericalangle AXM \Rightarrow \sphericalangle KXA = \sphericalangle AXM =$

$= 90° \Rightarrow AN \perp KM$.

Für die Fläche des Vierecks gilt $F(AKNM) = \frac{1}{2}|AN| \cdot |KM|$.

Da $\overline{AL}$ Durchmesser des Umkreises von $AKLM$ ist, gilt: $|KM| = |AL| \cdot \sin\alpha$, woraus folgt, dass $F(AKNM) = \frac{1}{2}|AN| \cdot |AL| \cdot \sin\alpha$, während $F(ABC) = \frac{1}{2}|AB||AC| \cdot \sin\alpha$ ist.

Es genügt also zu zeigen, dass $|AN| \cdot |AL| = |AB| \cdot |AC|$ ist. Nun gilt $\sphericalangle ABL = \sphericalangle ABC = \sphericalangle ANC$, da $\sphericalangle ABC$ und $\sphericalangle ANC$ spitze Umfangswinkel über $\overset{\frown}{AC}$ sind. Ausserdem ist $\sphericalangle BAL = \sphericalangle NAC = \frac{\alpha}{2}$. Also sind die Dreiecke ABL und ANC ähnlich. Damit gilt:

$|AB| : |AL| = |AN| : |AC| \Rightarrow |AB| \cdot |AC| = |AL| \cdot |AN|$.

qed.

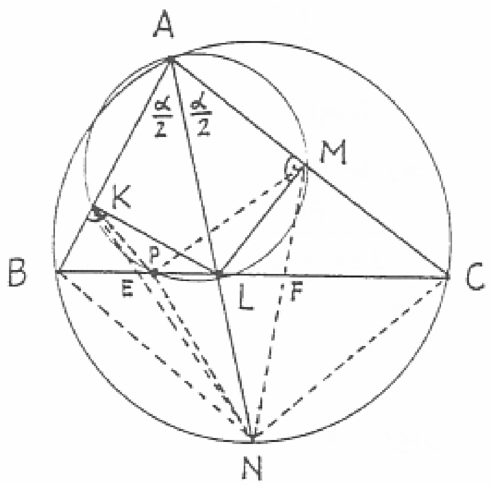
BEWEIS:

C

Wegen der beiden rechten Winkel ∢ LKA und ∢ AML ist AKLM ein Sehnenviereck (siehe Figur). Sein Umkreis schneide $\overline{BC}$ ein zweites Mal im Punkt P. Da auch das Viereck ABNC einen Umkreis besitzt, gilt:

∢ BCN = ∢ BAN sowie
∢ MAL = ∢ MPL.

Weil AL den Winkel α halbiert, folgt ∢ BCN = ∢ BAL = ∢ MAL, und daher ist ∢ MPL = ∢ BCN und somit PM ∥ NC. Analog beweist man, dass KP ∥ BN. Daher handelt es sich bei den Vierecken BKPN und NPMC um Trapeze und es gilt, dass A(BKE) = A(NPE) bzw.



A(PNF) = A(CFM). Daraus ergibt sich aber A(ABC) = A(AKNM).

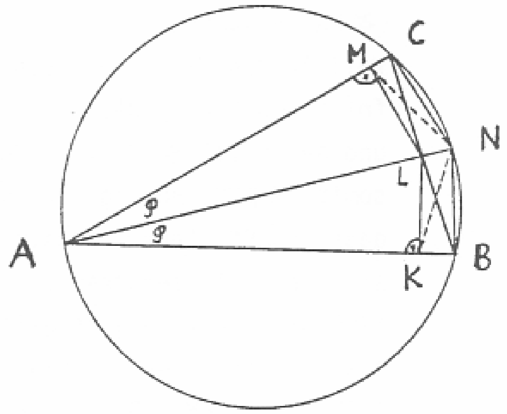
qed.

Beweis:

D

Gemäss Figur sei φ die Hälfte des Winkels bei A. Es gilt der Doppelwinkelsatz: $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$ sowie der Sinussatz:

$$2r = \frac{|BC|}{\sin 2\varphi} = \frac{|CN|}{\sin\varphi},$$ wo r der Radius des Umkreises vom ΔABC ist.



Aus beidem folgt

$$\frac{|BC|}{2\sin\varphi\cos\varphi} = \frac{|CN|}{\sin\varphi} \text{ bzw.}$$

$$|BC| = 2|CN|\cdot\cos\varphi = 2|CN|\cdot\frac{|AM|}{|AL|},$$

also $|BC|\cdot|AL| = 2|CN|\cdot|AM|$ (1)

Nun gilt im Sehnenviereck ABNC der Satz des Ptolemäus:

$|AB|\cdot|CN| + |AC|\cdot|NB| = |AN|\cdot|BC|$. Aus (1) folgt

$|BC| = \dfrac{2|CN|\cdot|AM|}{|AL|}$, und dies oben eingesetzt liefert

$$|AB|\cdot|CN| + |AC|\cdot|NB| = 2|AN|\cdot|CN|\cdot|AM|\cdot\frac{1}{|AL|}.$$

Wegen des gleichen Umfangswinkels ist $|CN| = |NB|$. Durch Division durch $|CN|$ bzw. $|NB|$ und Multiplikation mit $|AL|$ ergibt sich $|AL|\cdot(|AB|+|AC|) = 2|AN|\cdot|AM|$ und daraus

$|AL|\cdot|AB|\sin\varphi + |AL|\cdot|AC|\sin\varphi = |AN|\cdot|AM|\sin\varphi + |AN|\cdot|AK|\sin\varphi$ (2)

(Denn es ist $\sphericalangle AKL = \sphericalangle AML$ und $\sphericalangle KAL = \sphericalangle MAL$ und $|AL| = |AL|$, so dass $\Delta AKL \cong \Delta AML$ und daraus $|AK| = |AM|$ folgt.)

Nun ist $A(ALB) = |AL|\cdot|AB|\cdot\sin\varphi$ und entsprechend für die andern Summanden in (2). Es folgt für die Flächen:

$A(ALB) + A(ALC) = A(AMN) + A(AKN) \Rightarrow A(ABC) = A(AKNM)$.

qed.

B E W E I S:

E

Es geht darum, die Flächengleichheit des Dreiecks ABC mit dem zugehörigen Viereck AKNM nachzuweisen.

Idee: Ich zeichne auf einem A3-Papierbogen einen Kreis mit Radius r = 10cm und wähle 3 beliebige Punkte A,B und C auf der Kreisperipherie. Darnach konstruiere ich möglichst exakt das zugehörige Viereck AKNM. Diese so entstandene ganze Figur erstelle ich nochmals auf demselben Blatt Papier.
Aus der ersten Figur schneide ich das Dreieck ABC und aus der zweiten Figur das Viereck AKNM sorgfältig aus.
Auf einer Präzisionswaage "Mettler P160" wäge ich die beiden Figuren.

Diesen Prozess habe ich mit 9 weiteren A3-Blättern verschiedener Papiersorten durchgeführt. Die nachstehende Tabelle gibt Aufschluss über die so gemessenen Werte.

	Dreieck	Viereck
1)	1.155g	1.137g
2)	2.205g	2.312g
3)	1.385g	1.361g
4)	2.183g	2.170g
5)	1.802g	1.841g
6)	2.091g	2.108g
7)	2.477g	2.483g
8)	1.665g	1.571g
9)	1.429g	1.447g
10)	1.162g	1.155g
aM:	1.755g	1.759g

Nachdem ich beim Messen die groben und einseitig wirkenden Fehler vermieden habe, ergeben die beiden arithmetischen Mittel eine sehr gute Uebereinstimmung. Die Abweichung liegt durchaus im Toleranzbereich der Waage.
Da ich von einem allgemeinen Fall ausgegangen bin, ist die Dreiecksfläche ABC gleich der Vierecksfläche AKNM. qed.

Beweis mit Computer-Algebra

F

Bemerkungen

Im folgenden werden Punkte durch Vektoren bezeichnet (z.B. {a, b}).
Die Grössen x und y werden immer als unbekannte Koordinaten interpretiert.

Hilfsfunktionen

Punkte auf Einheitskreis

```
CirclePoint[angle_] := {Cos[angle], Sin[angle]}
```

Koordinaten aus Punkt berechnen

```
X[point_] := point[[1]]
```

```
Y[point_] := point[[2]]
```

Gerade aurch zwei Punkte

```
LineEquation[{x1_, y1_}, {x2_, y2_}] :=
   y - y1 == (x - x1) (y2 - y1) / (x2 - x1) // ExpandAll
```

Winkelhalbierende mit Hessescher Normalform (zwei Lösungen)

```
Bisectors[line1_, line2_] :=
   Block[ {exp, simp, d1, d2},
      exp = Map[(#[[1]] - #[[2]])&, {line1, line2}];
       simp = Map[Cancel[Denominator[Together[#]] #]&, exp];
      den = Sqrt[Apply[Plus, Map[Coefficient[#, {x, y}]& ,
simp]^2, 2]];
      { simp[[1]] / den[[1]] - simp[[2]] / den[[2]] == 0,
        simp[[1]] / den[[1]] + simp[[2]] / den[[2]] == 0 }
// Simplify
  ]
```

Schnittpunkt

```
Intersect[equ1_Equal, equ2_Equal] :=
   {x, y} /. Solve[{equ1, equ2}, {x, y}] // Simplify
```

Steigung einer Geraden

```
Slope[line_Equal] :=
   Coefficient[Collect[Solve[line, y][[1, 1, 2]], x], x]
// Simplify
```

Normale (zu einer Geraden, durch einen Punkt)

```
NormalThrough[line_, point_] :=
   y - Y[point] == - (x - X[point]) / Slope[line]
```

Dreiecksfläche

```
Area[u_, v_, w_] := 1/2 Abs[X[u] Y[v] - X[v] Y[u] +
   X[v] Y[w] - X[w] Y[v] + X[w] Y[u] - X[u] Y[w]]
```

Einheitskreis

```
circle = x^2 + y^2 == 1;
```

☐ Numerisches Beispiel

```
a = CirclePoint[15 Degree] // N
{0.965926, 0.258819}
b = CirclePoint[120 Degree] // N
{-0.5, 0.866025}
c = CirclePoint[-10 Degree] // N
{0.984808, -0.173648}
ab = LineEquation[a, b]
-0.258819 + y == 0.4001 - 0.414214 x
ac = LineEquation[a, c]
-0.258819 + y == 22.1233 - 22.9038 x
bc = LineEquation[b, c]
-0.866025 + y == -0.350104 - 0.700208 x
{ha1, ha2} = Bisectors[ab, ac]
{0.367535 - 0.616365 x + 0.88026 y == 0, -1.58506 + 1.38173 x + 0.9
n = Intersect[circle, ha1][[2]]
{-0.573576, -0.819152}
l = Intersect[ha1, bc][[1]]
{0.666553, 0.0491961}
lk = NormalThrough[ab, l]
-0.0491961 + y == 2.41421 (-0.666553 + x)
lm = NormalThrough[ac, l]
-0.0491961 + y == 0.0436609 (-0.666553 + x)
k = Intersect[lk, ab][[1]]
{0.784508, 0.333965}
m = Intersect[lm, ac][[1]]
{0.974491, 0.0626409}
Area[a, b, c] - Area[a, k, n] - Area[a, m, n] // Chop
0
```

Abschlussdramaturgie

Die Fallstudien-Methode steht und fällt nicht nur mit der Auswahl attraktiver Unterlagen und einer guten Einbettung in den Unterricht, sondern auch mit der Art und Weise, wie die „Ernte“ eingefahren wird. Diese Abschlussdramaturgie ist ein wichtiger Teil der Reflexion eines Themas durch Schülerinnen und Schüler. Exemplarisch sollen bei dieser Fallstudie nun einige mögliche Aktivitäten vorgestellt werden.

1. Das Streitgespräch

Die Schülerinnen und Schüler verteidigen gegenseitig mit Plakaten ihre Rangliste der Beweise aus den Unterlagen. Sie formulieren die verwendeten Kriterien.
Didaktische Zielsetzung:
Es ist möglich, ein Gespür für Eleganz, Schönheit und Tiefe eines Beweises zu bekommen. Nachdem man gelernt hat, die jeweilige Argumentationsbasis heraus zu schälen, lernt man jene Beweise schätzen, bei welchen die Beweisidee klar zum Ausdruck kommt.

2. Einladung von Personen

Ein Richter und ein Berufsmathematiker werden ins Schulzimmer eingeladen und sprechen über die Sicherheit von Beweisverfahren. Die Moderation und Vorbereitung der Fragen erfolgt durch eine Schülerin und einen Schüler.
Didaktische Zielsetzung:
Beweise im Rechtswesen unterscheiden sich von Beweisen in der Mathematik. Ein Vergleich fördert das Verständnis für die unterschiedlichen Auffassungen über die Sicherheit in den beiden Wissenschaften.

3. Mathematischer Aufsatz

Die ganze Klasse schreibt einen Aufsatz zum Thema „Sind Beweise in den Wissenschaften notwendig?“
Didaktische Zielsetzung:
Während mehr als 35 Jahren verlangte ich an der Matura einen Aufsatz über ein mathematisches Thema auf maximal zwei A4-Seiten. Obgleich vorgängig immer wieder geübt, bekundeten viele Schülerinnen und Schüler Mühe damit. Wer sich ein Bild über diese Art von Schreibkompetenz machen möchte, konsultiere die einschlägigen Internet-Foren.

4. Zeitungsartikel

Für die regionale Zeitung wird ein Artikel mit dem Titel „Jeder Beweis kann ein Problem sein!“ geschrieben. An der Ausarbeitung beteiligen sich mehrere Gruppen. Der beste Artikel wird eingesandt.
Didaktische Zielsetzung:
Eine Konfrontation der Schülerschaft mit fehlerhaften Beweisen oder offenen Beweissituationen (Mischung von richtigen und falschen Behauptungen usw.) schärft ihre Kritikfähigkeit. Es ist wichtig, die Unterschiede von Indizienbeweisen, Computerbeweisen, vollständiger Induktion, „Mausefallenbeweisen“, direkten und indirekten Beweisen zu kennen.
Erfahrungen:
Das verständliche Schreiben mathematischer Texte bereitet Schülerinnen und Schülern grosse Mühe. Das „Berliner Modell“ (Langer/Schulz von Thun/Tausch) sieht die Kriterien Einfach-

heit, Gliederung, Kürze und anregende Zusätze vor. Diese 4 Merkmale haben sich für die Bewertung von Texten sehr bewährt und sollten immer wieder geübt werden.

5. **Parteiversammlung**

Die Parteien der Intuitionisten, Formalisten und Konstruktivisten entwerfen je ein Wahlplakat und werben an einer fiktiven Parteiversammlung für ihre Partei. Welcher Versuch, die Mathematik auf sichere Fundamente zu stellen, erhält am meisten Stimmen?

Didaktische Zielsetzung:

Es ist notwendig zu wissen, wann ein Beweis als solcher akzeptiert wird, dh. welchen Spielregeln er genügen muss. Es gibt eine zeitgenössische „Beweisstrenge“. Im Laufe der Geschichte haben sich die Auffassungen darüber geändert.

Erfahrungen:

Die Thematik ist recht anspruchsvoll. Es ist wichtig, die einzelnen Parteiprogramme gut zu kennen, damit kein Geflunker entsteht, das die Gegner unerbittlich zu ihren Gunsten ausnützen. Die Entdeckung von Antinomien (Widerspruch eines Satzes in sich oder zweier Sätze, von denen jeder Gültigkeit beanspruchen kann) rüttelte stark an den Grundlagen der Mathematik und brachte unterschiedliche neue Ansätze hervor.

.

LOGIZISMUS	FORMALISMUS	INTUITIONISMUS
Gründer: Frege, Russel	Gründer: Hilbert	Gründer: Brouwer
alles auf reine Logik zurückführbar (absolut)	sichere Spielregeln	es gibt Evidenzerlebnisse (z.B. Existenz der nat. Zahlen); Ur-Intuitionen
math. Objekte existieren unabhängig von uns (wir entdecken sie)	axiomatischer Aufbau	alles andere durch Konstruktion erzeugen (und damit existiert es)
Platonische Ideen	es gibt keine math. Objekte, nur Symbolketten, Formeln	Satz vom ausgeschlossenen Dritten nicht gültig
vollständige Induktion ok. (Nachfolger-Relation)	kein Anspruch auf Anwendungen in der Natur	kein Anspruch auf Anwendungen in der Natur
transfinite Zahlen ok.	zentral: Widerspruchsfreiheit und Existenz	Mathematik nicht unabhängig vom erkennenden Menschen
	Satz vom ausgeschlossenen Dritten ok	
	keine indirekten Beweise	

6. Podiumsgespräch
Die Vertreter der Schülergruppe „Mathematik“ und jene der Gruppe „Iurisprudenz“ debattieren am Tisch über die Sicherheit von Beweisen.
Didaktische Zielsetzung:
„Ein durchgreifender Advokat in einer gerechten Sache, ein durchdringender Mathematiker vor dem Sternenhimmel erscheinen beide gleich gottähnlich.“ (Goethe)
Präzise Stellungnahme ist unabdingbar. Geflunker oder unreflektiertes Zitieren müssen zurückgewiesen werden.

7. Exkursion
Vorschläge: Bibliotheksbesuch (Gesetzessammlung); Gerichtsverhandlung (nur in Ausnahmefällen möglich); geeignete Vorlesung an der Universität; Advokaturbüro.
Didaktische Zielsetzung:
Beweisen ist eine eher unbeliebte Tätigkeit bei Schülern. Es muss daher viel für die Weckung des Beweisbedürfnisses getan werden.

8. Beurteilung von Lehrmitteln
Die Häufigkeit und Einsichtigkeit von Beweisen in verschiedenen Lehrmitteln kann in Gruppen diskutiert werden.
Didaktische Zielsetzung:
Beweisen ist auf verschiedenen Vorstufen und Niveaus möglich. Ein Satz kann oft auf viele Arten bewiesen werden. Schülerinnen und Schüler sollen lernen, schöne Beweise mit überzeugender Argumentation von schwerfälligen und redundanten Beweisen zu unterscheiden.

9. Umfragen
Im eigenen Schulhaus oder auf der Strasse können vorbereitete Fragen zu einem aktuellen Gerichtsfall oder zu Computerbeweisen in der Mathematik gestellt werden.
Didaktische Zielsetzung:
Beweise sind keine Dramen in 3 Akten (Voraussetzung, Behauptung, Beweis), sondern können lehrreich und spannend sein. Argumentieren ist eine wichtige Fähigkeit, welche tagtäglich von uns verlangt wird.

10. Ausstellung, Postersession
Die Präsentation einiger wichtiger Beweise der Mathematik in ihrem historischen Kontext bringt Leben in die Schulhausgänge. Graphisch gut gemachte Poster machen Werbung für die Notwendigkeit des Beweisens.
Didaktische Zielsetzung:
„Der einzige Beweis des Könnens ist das Tun.“ (M.v.Ebner-Eschenbach)

11. Varia
Selbstverständlich ist mit den obigen Vorschlägen die Liste der „Abschlussdramaturgien“ nicht erschöpft. Je nach Situation sind weitere Optionen möglich:
a) Gesprächsrunde am Kamin,
b) Vortrag mit Beamer am Elternabend der betreffenden Klasse,
c) Schreiben einer Facharbeit über den Vergleich Mathematik-Iurisprudenz bezüglich Sicherheit von Beweisen,
d) Sammlung und Diskussion von Zitaten über das Beweisen,
e) Treffen mit Ehemaligen, welche Ius oder Mathematik studiert haben,
f) Vorführung von Beweisen wie 4=5, alle Dreiecke sind gleichseitig, Figuren zerschneiden und zu Figuren mit grösserer Fläche zusammensetzen usw.

g) Die Rolle von Paradoxien in der Mathematik (Zenon, Bertrand).
h) Einsetzung einer Lehrplankommission, welche entscheidet, „wieviele Beweise der Mensch braucht“.

Bei der Erprobung von Abschlussdramaturgien hat sich gezeigt, dass es ohne eine gründliche Planung durch die Lehrperson und eine seriöse Vorbereitung durch die Schülerschaft nicht geht. Viele der vorgestellten Aktivitäten sind ungewohnt und benötigen daher eine sorgfältige Instruktion. Die bei diesem Thema mögliche Verknüpfung von Schule und Alltag kommt sehr gut an und hinterlässt auch bei mathematisch weniger interessierten Schülerinnen und Schülern nachhaltige Spuren.

Glossar

a priori: von vornherein; unabhängig von der Erfahrung oder Wahrnehmung
Aristoteles: griech. Philosoph und Naturforscher; 384-322 v.Chr.
Axiome: «selbstevidente» Aussagen, die keiner Begründung bedürfen; sie legen Beziehungen zwischen den Elementen einer vorgegebenen Menge fest; aus dem System der Axiome werden die Sätze einer Theorie durch logisches Schliessen hergeleitet
Brouwer: Luitzen E.J.; holländischer Mathematiker; 1881- 1966
BZP: Bundeszivilprozess-Ordnung
Einstein: Albert; Physiker; 1879-1955
Euklid: Mathematiker; um 300 v.Chr.
Evidenz: Offenkundigkeit; höchste Gewissheit
FBI: Federal Bureau of Investigation; Bundeskriminalpolizei der USA
Gauss: Carl Friedrich; Mathematiker; 1777-1855
Gödel: Kurt; Mathematiker; 1906-1978
Heyting: Arend; niederländischer Mathematiker; 1898-1980
Hilbert: David; Mathematiker; 1862-1943
Indizien: Umstände, deren Vorhandensein mit grosser Wahrscheinlichkeit auf eine bestimmte Täterschaft schliessen lassen
iura novit curia: Das Rathaus kennt die Rechte
Junktoren: Verknüpfungen der Aussagenlogik
Kolmogoroff: Andrei Nikolajewitsch; sowjetischer Mathematiker; geb. 1903
Lebesgue: Henri; Mathematiker; 1875-1941
Logizismus: Versuch, die Mathematik auf die reine Logik zurückzuführen; Hauptvertreter: Frege, Whitehead, Russell
Lorenzen: Paul; Mathematiker; geb.1915
m.a.W.: mit andern Worten
Minerva: römische Göttin der Handwerker, Künstler und Ärzte
mutatis mutandis: mit den nötigen Abänderungen
oBdA: ohne Beschränkung der Allgemeinheit
Pascal: Blaise; Mathematiker und religiöser Denker; 1623-1662
Potenzsatz: Schneiden sich zwei Sekanten eines Kreises ausserhalb, so ist das Produkt der Abschnitte, gerechnet vom Schnittpunkt, für jede Sekante gleich.
qed.: quod erat demonstrandum; was zu beweisen war
Russell: Bertrand; englischer Mathematiker; 1872-1969
Satz des Ptolemäus: In jedem Sehnenviereck ist das Produkt aus den beiden Diagonalen gleich der Summe der Produkte aus den beiden Gegenseiten.
Semantik: Lehre von der Bedeutung des Wortes
Serologe: Forscher, welcher sich mit der Lehre von den Eigenschaften des Blutserums und ihrer Nutzanwendung befasst
Syllogismus: Schlussfolgerung aus 2 Vordersätzen (Prämissen); von Aristoteles entwickelt
Topologie: Teilgebiet der modernen Geometrie; untersucht geom. Gebilde ohne Rücksicht auf Massverhältnisse, Längen, Winkel usw.
Vierfarbenproblem: Kann man jede Landkarte mit vier Farben so färben, dass benachbarte Länder verschiedene Farben haben?
vollständige Induktion: bestimmte Beweismethode in der Mathematik; auch «Schluss von n auf n+1» genannt
Weierstrass: Karl; Mathematiker; 1815-1897
Wiener: Norbert; Mathematiker; 1894-1964