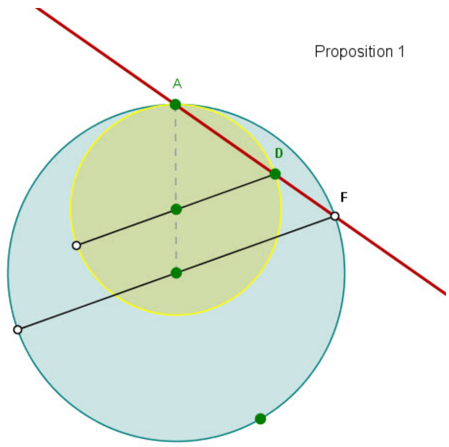
Kreisgeometrie mit Archimedes

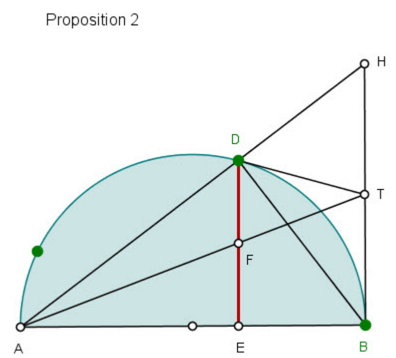
Albert A. Gächter

Thabit Ibn Qurrah (836-901) lebte in Bagdad und übersetzte unter anderem auch die Werke von Archimedes. Unter grossem Aufwand bearbeitete er den vermutlich ebenfalls von Archimedes stammenden schlecht erhaltenen Artikel über Kreisgeometrie, der später ins Latein übertragen und als *Liber Assumptorum* bekannt wurde. Eine gut kommentierte englische Ausgabe redigierte T. L. Heath unter dem Namen *Book of Lemmas*.

In 15 Propositionen kommt ein gehöriges Stück spannende Kreisgeometrie zur Sprache. Die Sätze sind für die Schule eher ungewohnt, was den Reiz erhöht. Eine gute Übung besteht darin, die 15 Propositionen mit einer dynamischen Geometrie-Software nachzuvollziehen und zu überprüfen. Als Beispiele aus meiner Küche sind die Nummern 1, 2 und 14 mit *Z.u.L.* (freeware) vorhanden.
Eine Fundgrube stellen auch die vorhandenen Beweise dar.

Satz 14 enthält die interessante Figur *Salinon* (Salzstreuer). Einige beigefügte Aufgaben zeigen, wie eine Beschäftigung mit dieser aus 4 Halbkreisen bestehenden Konstruktion zu guter Mathematik hinführt.



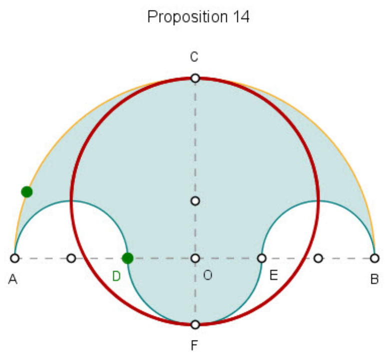


Proposition 1
(A, D und F liegen auf einer Geraden)

Proposition 2
(DF = FE)

Hier kann man die 3 Propositionen, hergestellt mit der DGS Zirkel und Lineal *Z.u.L.*, herunterladen:
Prop1 Prop2 Prop14
Merke: Punkte, an denen man „ziehen“ kann, sind grün gefärbt!

Proposition 14: Salinon



Proposition 14
(Salinonfläche = Fläche des roten Kreises)

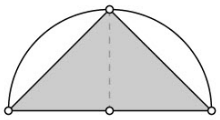
Sobald die Formel für die Kreisfläche in der Schule behandelt ist, kann ein Beweis der Proposition 14 sehr einfach geführt werden.

Damit sollte man sich aber nicht zufrieden geben, sondern weitere Beweise suchen (→ Internet).

Welcher Beweis ist der „schönste" oder/und der „einleuchtendste"?

Aktivitäten

1. Nütze für einen Beweis der Proposition 14 die Tatsache aus, dass die Fläche eines Halbkreises $\pi/2$ mal die Fläche des einbeschriebenen Dreiecks ausmacht (siehe Figur).



2. Studiere die im Beweis des Archimedes erwähnte Proposition 10 im II. Buch des Euklid.

   Halbiert man eine Strecke und setzt ihr irgendeine Strecke gerade an, so sind die Quadrate über der ganzen Strecke mit Verlängerung und über der Verlängerung beide zusammen doppelt so gross wie das Quadrat über der Hälfte und das über der Hälfte und Verlängerung vereint gezeichnete Quadrat zusammen.
   Es handelt sich um die Formel $(2a+b)^2 + b^2 = 2[a^2+(a+b)^2]$

3. Zeige, dass sich die Salinonfläche auch als $\pi\,(r_1 + r_2)^2$ ergibt (r_1=AD/2, r_2=OD).

4. Ist der Umfang des Salinon auch gleich dem Umfang des roten Kreises?
   Nein.
   Beachte: Der Umfang des Salinon hängt nur vom Radius OA ab und nicht vom Durchmesser AD!

5. Strebt D gegen O (und damit auch E) entsteht ein spezieller Arbelos. Verweile!

6. Wo liegt der Flächen-Schwerpunkt des Salinon?
   Aus Symmetriegründen liegt der SP sicher auf CF. Die y-Koordinate ist $4r_1/\pi$, wenn O der Ursprung ist.

7. Suche weitere mit lauter Halbkreisen begrenzte Figuren und berechne deren Fläche.
   Arbelos, Möndchen des Hippokrates, Yin-Yang usw.

8. Mit einer DGS lassen sich Flächeninhalte wie in Proposition 14 ebenfalls ermitteln. Gilt dies als Beweis?