Multiplikationstafeln

Rechenintensive Arbeiten in der Landesvermessung und Astronomie, sowie im Handel, machten es in früheren Jahrhunderten wünschenswert, höhere Rechenarten auf niedrigere zurück zu führen. Obwohl seit dem 17. Jahrhundert die Logarithmen als universelles Werkzeug zur Verfügung standen, erfreuten sich die Rechentafeln grosser Beliebtheit. Tabellen für das Einmaleins, das Multiplizieren und Dividieren grosser Zahlen und das Ausziehen von Wurzeln schossen wie Pilze aus dem Boden. Heutige Bibliotheken besitzen Tausende verschiedener Tabellenwerke für mannigfache damalige Bedürfnisse. Erstaunlich sind der Phantasiereichtum und die Cleverness, mit welcher möglichst platzsparende Tabellen erstellt wurden. An dieser Stelle möchte ich drei berühmte Tabellen vorstellen und den zu Grunde liegenden Ideen etwas nachgehen.

a) Die Produkte-Tafel von Crelle

Seit 1820 erschienen August Leopold Crelle's Rechentafeln in mehreren Auflagen.

Dr. A. L. Crelle's

Rechentafeln

welche

alles Multipliciren und Dividiren

mit Zahlen unter Tausend

ganz ersparen,

bei grösseren Zahlen aber die Rechnung erleichtern und sicherer machen.

Das Werk enthält das grosse Einmaleins bis 1000 mal 1000, also 10^6 Tafeleinträge. Wegen der Kommutativität der Multiplikation hätte Crelle den Platzbedarf auf die Hälte reduzieren können. Er schreibt:

Man sieht, dass auf diese Weise die Tafeln alle Producte ungleicher Zahlen unter 1000, doppelt enthalten. Der Umfang der Tafeln hätte also eigentlich, beinahe auf die Hälfte eingeschränkt werden können, allein diese Einschränkung hätte, wie sich unten bei den Beispielen der Anwendung näher zeigen wird, den Gebrauch der Tafeln unbequem gemacht; daher sind die Producte für jeden Factor vollständig abgedruckt worden.

Die Berechnung von $11 \cdot 382$ erfolgt so:

- Schlage jene Seite auf, wo der erste Faktor oben als grosse fette Zahl erscheint. Hier also 11.
- Wähle die Kolonne mit den Hundertern des zweiten Faktors. Hier 300.
- Suche die Zeile mit der Nummer der Zehner und Einer des zweiten Faktors. Hier 82.
- Notiere die Zahl im Schnittpunkt dieser Kolonne und Zeile. Hier 42.
- Ganz rechts auf der Zeile befindet sich die anzuhängende Ziffernfolge. Hier 02. Das Ergebnis ist somit 4202.

Die Nullen z.B. bei $11 \cdot 38200$ sind selber zu setzen. Die Tafel lässt sich auch für grössere Faktoren als 1000 einsetzen. In der Einleitung steht:

Wenn nämlich beim Multipliciren die Factoren, beim Dividiren, Divisor und Quotient kleiner als 1000 sind, so erspart dieses Einmaleins die Rechnung ganz; denn es enthält die Producte solcher Zahlen fertig berechnet. Grössere Rechnungen vereinfacht es, in dem Verhältniss, wie man mehrere Ziffern zusammen nehmen kann. Wäre z. B. eine sechsziffrige Zahl mit einer andern sechsziffrigen Zahl zu multipliciren, so sind, wenn man sich nur des gewöhnlichen Einmaleins bedient, die Producte jeder Ziffer des Multiplicators, in jede Ziffer des Multiplicandus, also zusammen 36 einzelne Producte zum Resultat nöthig. Hier, wo man 3 Ziffern auf einmal zusammen nehmen, also eine sechsziffrige Zahl als nur aus 2 Theilen bestehend, oder gleichsam wie eine zweiziffrige Zahl behandeln kann, braucht man nur 4 Producte; mithin wird in diesem Fall die Zahl der einzelnen Producte bis auf den neunten Theil vermindert.

Für Faktoren über 1000 werden also einige Multiplikationen durch Additionen ersetzt. Einen gewaltigen Schritt vorwärts bezüglich Einfachheit macht die Viertelquadrat-Methode.

11	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	
1	0	11	22	33	44	55	66	77	88	99	11
2	0	11	22	33	44	55	66	77	88	99	22
3	0	11	22	33	44	55	66	77	88	99	33
4	0	11	22	33	44	55	66	77	88	99	44
5	0	11	22	33	44	55	66	77	88	99	55
6	0	11	22	33	44	55	66	77	88	99	66
7	0	11	22	33	44	55	66	77	88	99	77
8	0	11	22	33	44	55	66	77	88	99	88
9	0	11	22	33	44	55	66	77	88	99	99
11	1	12	23	34	45	56	67	78	89	100	21
12	1	12	23	34	45	56	67	78	89	100	32
13	1	12	23	34	45	56	67	78	89	100	43
14	1	12	23	34	45	56	67	78	89	100	54
15	1	12	23	34	45	56	67	78	89	100	65
16	1	12	23	34	45	56	67	78	89	100	76
17	1	12	23	34	45	56	67	78	89	100	87
18	1	12	23	34	45	56	67	78	89	100	98
19	2	13	24	35	46	57	68	79	90	101	09
21	2	13	24	35	46	57	68	79	90	101	31
22	2	13	24	35	46	57	68	79	90	101	42
23	2	13	24	35	46	57	68	79	90	101	53
24	2	13	24	35	46	57	68	79	90	101	64
25	2	13	24	35	46	57	68	79	90	101	75
26	2	13	24	35	46	57	68	79	90	101	86
27	2	13	24	35	46	57	68	79	90	101	97
28	3	14	25	36	47	58	69	80	91	102	08
29	3	14	25	36	47	58	69	80	91	102	19
31	3	14	25	36	47	58	69	80	91	102	41
32	3	14	25	36	47	58	69	80	91	102	52
33	3	14	25	36	47	58	69	80	91	102	63
34	3	14	25	36	47	58	69	80	91	102	74
35	3	14	25	36	47	58	69	80	91	102	85
36	3	14	25	36	47	58	69	80	91	102	96
37	4	15	26	37	48	59	70	81	92	103	07
38	4	15	26	37	48	59	70	81	92	103	18
39	4	15	26	37	48	59	70	81	92	103	29
41	4	15	26	37	48	59	70	81	92	103	51
42	4	15	26	37	48	59	70	81	92	103	62
43	4	15	26	37	48	59	70	81	92	103	73
44	4	15	26	37	48	59	70	81	92	103	84
45	4	15	26	37	48	59	70	81	92	103	95
46	5	16	27	38	49	60	71	82	93	104	06
47	5	16	27	38	49	60	71	82	93	104	17
48	5	16	27	38	49	60	71	82	93	104	28
49	5	16	27	38	49	60	71	82	93	104	39
51	5	16	27	38	49	60	71	82	93	104	61
52	5	16	27	38	49	60	71	82	93	104	72
53	5	16	27	38	49	60	71	82	93	104	83
54	5	16	27	38	49	60	71	82	93	104	94
55	6	17	28	39	50	61	72	83	94	105	05
56	6	17	28	39	50	61	72	83	94	105	16
57	6	17	28	39	50	61	72	83	94	105	27
58	6	17	28	39	50	61	72	83	94	105	38
59	6	17	28	39	50	61	72	83	94	105	49
61	6	17	28	39	50	61	72	83	94	105	71
62	6	17	28	39	50	61	72	83	94	105	82
63	6	17	28	39	50	61	72	83	94	105	93
64	7	18	29	40	51	62	73	84	95	106	04
65	7	18	29	40	51	62	73	84	95	106	15
66	7	18	29	40	51	62	73	84	95	106	26
67	7	18	29	40	51	62	73	84	95	106	37
68	7	18	29	40	51	62	73	84	95	106	48
69	7	18	29	40	51	62	73	84	95	106	59
71	7	18	29	40	51	62	73	84	95	106	81
72	7	18	29	40	51	62	73	84	95	106	92
73	8	19	30	41	52	63	74	85	96	107	03
74	8	19	30	41	52	63	74	85	96	107	14
75	8	19	30	41	52	63	74	85	96	107	25
76	8	19	30	41	52	63	74	85	96	107	36
77	8	19	30	41	52	63	74	85	96	107	47
78	8	19	30	41	52	63	74	85	96	107	58
79	8	19	30	41	52	63	74	85	96	107	69
81	8	19	30	41	52	63	74	85	96	107	91
82	9	20	31	42	53	64	75	86	97	108	02
83	9	20	31	42	53	64	75	86	97	108	13
84	9	20	31	42	53	64	75	86	97	108	24
85	9	20	31	42	53	64	75	86	97	108	35
86	9	20	31	42	53	64	75	86	97	108	46
87	9	20	31	42	53	64	75	86	97	108	57
88	9	20	31	42	53	64	75	86	97	108	68
89	9	20	31	42	53	64	75	86	97	108	79
91	10	21	32	43	54	65	76	87	98	109	01
92	10	21	32	43	54	65	76	87	98	109	12
93	10	21	32	43	54	65	76	87	98	109	23
94	10	21	32	43	54	65	76	87	98	109	34
95	10	21	32	43	54	65	76	87	98	109	45
96	10	21	32	43	54	65	76	87	98	109	56
97	10	21	32	43	54	65	76	87	98	109	67
98	10	21	32	43	54	65	76	87	98	109	78
99	10	21	32	43	54	65	76	87	98	109	89

12	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	
1	0	12	24	36	48	60	72	84	96	108	12
2	0	12	24	36	48	60	72	84	96	108	24
3	0	12	24	36	48	60	72	84	96	108	36
4	0	12	24	36	48	60	72	84	96	108	48
5	0	12	24	36	48	60	72	84	96	108	60
6	0	12	24	36	48	60	72	84	96	108	72
7	0	12	24	36	48	60	72	84	96	108	84
8	0	12	24	36	48	60	72	84	96	108	96
9	1	13	25	37	49	61	73	85	97	109	08
11	1	13	25	37	49	61	73	85	97	109	32
12	1	13	25	37	49	61	73	85	97	109	44
13	1	13	25	37	49	61	73	85	97	109	56
14	1	13	25	37	49	61	73	85	97	109	68
15	1	13	25	37	49	61	73	85	97	109	80
16	1	13	25	37	49	61	73	85	97	109	92
17	2	14	26	38	50	62	74	86	98	110	04
18	2	14	26	38	50	62	74	86	98	110	16
19	2	14	26	38	50	62	74	86	98	110	28
21	2	14	26	38	50	62	74	86	98	110	52
22	2	14	26	38	50	62	74	86	98	110	64
23	2	14	26	38	50	62	74	86	98	110	76
24	2	14	26	38	50	62	74	86	98	110	88
25	3	15	27	39	51	63	75	87	99	111	00
26	3	15	27	39	51	63	75	87	99	111	12
27	3	15	27	39	51	63	75	87	99	111	24
28	3	15	27	39	51	63	75	87	99	111	36
29	3	15	27	39	51	63	75	87	99	111	48
31	3	15	27	39	51	63	75	87	99	111	72
32	3	15	27	39	51	63	75	87	99	111	84
33	3	15	27	39	51	63	75	87	99	111	96
34	4	16	28	40	52	64	76	88	100	112	08
35	4	16	28	40	52	64	76	88	100	112	20
36	4	16	28	40	52	64	76	88	100	112	32
37	4	16	28	40	52	64	76	88	100	112	44
38	4	16	28	40	52	64	76	88	100	112	56
39	4	16	28	40	52	64	76	88	100	112	68
41	4	16	28	40	52	64	76	88	100	112	92
42	5	17	29	41	53	65	77	89	101	113	04
43	5	17	29	41	53	65	77	89	101	113	16
44	5	17	29	41	53	65	77	89	101	113	28
45	5	17	29	41	53	65	77	89	101	113	40
46	5	17	29	41	53	65	77	89	101	113	52
47	5	17	29	41	53	65	77	89	101	113	64
48	5	17	29	41	53	65	77	89	101	113	76
49	5	17	29	41	53	65	77	89	101	113	88
51	6	18	30	42	54	66	78	90	102	114	12
52	6	18	30	42	54	66	78	90	102	114	24
53	6	18	30	42	54	66	78	90	102	114	36
54	6	18	30	42	54	66	78	90	102	114	48
55	6	18	30	42	54	66	78	90	102	114	60
56	6	18	30	42	54	66	78	90	102	114	72
57	6	18	30	42	54	66	78	90	102	114	84
58	6	18	30	42	54	66	78	90	102	114	96
59	7	19	31	43	55	67	79	91	103	115	08
61	7	19	31	43	55	67	79	91	103	115	32
62	7	19	31	43	55	67	79	91	103	115	44
63	7	19	31	43	55	67	79	91	103	115	56
64	7	19	31	43	55	67	79	91	103	115	68
65	7	19	31	43	55	67	79	91	103	115	80
66	7	19	31	43	55	67	79	91	103	115	92
67	8	20	32	44	56	68	80	92	104	116	04
68	8	20	32	44	56	68	80	92	104	116	16
69	8	20	32	44	56	68	80	92	104	116	28
71	8	20	32	44	56	68	80	92	104	116	52
72	8	20	32	44	56	68	80	92	104	116	64
73	8	20	32	44	56	68	80	92	104	116	76
74	8	20	32	44	56	68	80	92	104	116	88
75	9	21	33	45	57	69	81	93	105	117	00
76	9	21	33	45	57	69	81	93	105	117	12
77	9	21	33	45	57	69	81	93	105	117	24
78	9	21	33	45	57	69	81	93	105	117	36
79	9	21	33	45	57	69	81	93	105	117	48
81	9	21	33	45	57	69	81	93	105	117	72
82	9	21	33	45	57	69	81	93	105	117	84
83	9	21	33	45	57	69	81	93	105	117	96
84	10	22	34	46	58	70	82	94	106	118	08
85	10	22	34	46	58	70	82	94	106	118	20
86	10	22	34	46	58	70	82	94	106	118	32
87	10	22	34	46	58	70	82	94	106	118	44
88	10	22	34	46	58	70	82	94	106	118	56
89	10	22	34	46	58	70	82	94	106	118	68
91	10	22	34	46	58	70	82	94	106	118	92
92	11	23	35	47	59	71	83	95	107	119	04
93	11	23	35	47	59	71	83	95	107	119	16
94	11	23	35	47	59	71	83	95	107	119	28
95	11	23	35	47	59	71	83	95	107	119	40
96	11	23	35	47	59	71	83	95	107	119	52
97	11	23	35	47	59	71	83	95	107	119	64
98	11	23	35	47	59	71	83	95	107	119	76
99	11	23	35	47	59	71	83	95	107	119	88

b) Die Viertelquadrat-Tafel von Blater

Euklid beweist in seinen *Elementen* die bemerkenswerte und sehr alte Formel (bereits 2000 v. Chr.?)

$$xy = \frac{1}{4}(x+y)^2 - \frac{1}{4}(x-y)^2$$

Eine erste Blüte erlebte diese Formel in der prostaphäretischen Methode des 16.Jahrhunderts und eine zweite in den Viertelquadrat-Tafeln des 19.Jahrhunderts. Der Ingenieur A. Voisin brachte 1817 die erste solche Tafel heraus. 1887 erschien nach eineinhalb Jahren intensiven Rechnens (!) in Wien die Tafel der Viertel-Quadrate von Joseph Blater für alle ganzen Zahlen von 1 bis 200000.

Blater, *dem Berufe nach der mathematischen Wissenschaft fern stehend und seiner höheren Vertrautheit mit dieser Disziplin entbehrend*, druckte die Tabellen auf eigene Kosten, *ein Entschluss, der durch den Mangel an Aussicht auf pekuniären Gewinn und Entlohnung der aufgewendeten Mühe nicht wankend gemacht wurde.* Die Rechenblätter sind sparsam und ausgeklügelt aufgebaut. Für Faktoren unter 1000 zum Beispiel wären lediglich 2000 Einträge nötig, anstelle der 10^6 bei Crelle.

Blater war überzeugt, dass seine Tafeln vollkommen fehlerfrei sind, denn er rechnete sie mehrfach und auf verschiedene Arten durch. Dies ist bemerkenswert, da es sich hier um Produkte mit sechsstelligen Faktoren handelt.
Die anfänglich nicht ganz einfache Handhabung der Tabellen sei an folgendem Beispiel erläutert: $ab = 93319 \cdot 33674$.

Vorgehen:

- Zunächst bildet man $s = a + b$ und $d = a - b$. Hier 126993 und 59645.
- s und d heissen Argumente und werden im Eingangsbereich $N + n$ aufgesucht. N bedeutet den Dreierblock der Tausender, n jenen der Hunderter. Hier für s heisst dies $N = 126$ und $n = 993$. Gesucht wird also die Tafel mit der Überschrift 990.
- A bedeutet die Anfangsziffern, B die mittleren Ziffern und C die Endziffern. Hier für s ergibt dies $A = 4031$, $B = 805$ und $C = 512$ ($4031805512 = 0.25 \cdot s^2$).
- Analog für d. Hier sucht man die Tafel 640 und findet $A = 889$, $B = 381$ und $C = 506$ ($889381506 = 0.25 \cdot d^2$).
- Die Subtraktion liefert ab. Hier $ab = 3142424006$.

Neben den Multiplikationen sind auch *Quadrierungen und das Wurzelziehen bedeutend erleichtert und durch vorzügliche Correctheit fehlerlose Resultate verbürgt.*

I.

N	+ n	990	991 992 993	994 995 996	997 998 999
	A	B			
100	2549	745	795 846 896	947 997*048	*098*149*199
102	2651	735	786 838 889	941 992*044	*095*147*198
104	2755	725	777 830 882	935 987*040	*092*145*197
106	2861	715	768 822 875	929 982*036	*089*143*196
108	2969	705	759 814 868	923 977*032	*086*141*195
110	3079	695	750 806 861	917 972*028	*083*139*194
112	3191	685	741 798 854	911 967*024	*080*137*193
114	3305	675	732 790 847	905 962*020	*077*135*192
116	3421	665	723 782 840	899 957*016	*074*133*191
118	3539	655	714 774 833	893 952*012	*071*131*190
120	3659	645	705 766 826	887 947*008	*068*129*189
122	3781	635	696 758 819	881 942*004	*065*127*188
124	3905	625	687 750 812	875 937*000	*062*125*187
126	4031	[illegible]	[illegible] [illegible] 805	869 932 996	*059*123*186
128	4159	605	669 734 798	863 927 992	*056*121*185
130	4289	595	660 726 [illegible]	857 922 988	*053*119*184
132	4421	585	651 718 [illegible]	851 917 984	*050*117*183
134	4555	575	642 710 [illegible]	845 912 980	*047*115*182
136	4691	565	633 702 [illegible]	839 907 976	*044*113*181
138	4829	555	624 694 [illegible]	833 902 972	*041*111*180
140	4969	545	615 686 [illegible]	827 897 968	*038*109*179
142	5111	535	606 678 [illegible]	821 892 964	*035*107*178
144	5255	525	597 670 [illegible]	815 887 960	*032*105*177
146	5401	515	588 662 [illegible]	809 882 956	*029*103*176
148	5549	505	579 654 [illegible]	803 877 952	*026*101*175
150	5699	495	570 646 [illegible]	797 872 948	*023*099*174
152	5851	485	561 638 [illegible]	791 867 944	*020*097*173
154	6005	475	552 630 [illegible]	785 862 940	*017*095*172
156	6161	465	543 622 [illegible]	779 857 936	*014*093*171
158	6319	455	534 614 [illegible]	773 852 932	*011*091*170
160	6479	445	525 606 [illegible]	767 847 928	*008*089*169
162	6641	435	516 598 [illegible]	761 842 924	*005*087*168
164	6805	425	507 590 [illegible]	755 837 920	*002*085*167
166	6971	415	498 582 [illegible]	749 832 916	999*083*166
168	7139	405	489 574 [illegible]	743 827 912	996*081*165
170	7309	395	480 566 [illegible]	737 822 908	993*079*164
172	7481	385	471 558 [illegible]	731 817 904	990*077*163
174	7655	375	462 550 [illegible]	725 812 900	987*075*162
176	7831	365	453 542 [illegible]	719 807 896	984*073*161
178	8009	355	444 534 [illegible]	713 802 892	981*071*160
180	8189	345	435 526 [illegible]	707 797 888	978*069*159
182	8371	335	426 518 [illegible]	701 792 884	975*067*158
184	8555	325	417 510 [illegible]	695 787 880	972*065*157
186	8741	315	408 502 [illegible]	689 782 876	969*063*156
188	8929	305	399 494 [illegible]	683 777 872	966*061*155
190	9119	295	390 486 [illegible]	677 772 868	963*059*154
192	9311	285	381 478 [illegible]	671 767 864	960*057*153
194	9505	275	372 470 [illegible]	665 762 860	957*055*152
196	9701	265	363 462 [illegible]	659 757 856	954*053*151
198	9899	255	354 454 [illegible]	653 752 852	951*051*150
	C	025	520 016 512	009 506 004	502 001 500

II.

N	+ n	990	991 992 993	994 995 996	997 998 999
	A	B			
101	2600	490	541 592 643	694 745 796	847 898 949
103	2703	480	532 584 636	688 740 792	844 896 948
105	2808	470	523 576 629	682 735 788	841 894 947
107	2915	460	514 568 622	676 730 784	838 892 946
109	3024	450	505 560 615	670 725 780	835 890 945
111	3135	440	496 552 608	664 720 776	832 888 944
113	3248	430	487 544 601	658 715 772	829 886 943
115	3363	420	478 536 594	652 710 768	826 884 942
117	3480	410	469 528 587	646 705 764	823 882 941
119	3599	400	460 520 580	640 700 760	820 880 940
121	3720	390	451 512 573	634 695 756	817 878 939
123	3843	380	442 504 566	628 690 752	814 876 938
125	3968	370	433 496 559	622 685 748	811 874 937
127	4095	360	424 488 552	616 680 744	808 872 936
129	4224	350	415 480 545	610 675 740	805 870 935
131	4355	340	406 472 538	604 670 736	802 868 934
133	4488	330	397 464 531	598 665 732	799 866 933
135	4623	320	388 456 524	592 660 728	796 864 932
137	4760	310	379 448 517	586 655 724	793 862 931
139	4899	300	370 440 510	580 650 720	790 860 930
141	5040	290	361 432 503	574 645 716	787 858 929
143	5183	280	352 424 496	568 640 712	784 856 928
145	5328	270	343 416 489	562 635 708	781 854 927
147	5475	260	334 408 482	556 630 704	778 852 926
149	5624	250	325 400 475	550 625 700	775 850 925
151	5775	240	316 392 468	544 620 696	772 848 924
153	5928	230	307 384 461	538 615 692	769 846 923
155	6083	220	298 376 454	532 610 688	766 844 922
157	6240	210	289 368 447	526 605 684	763 842 921
159	6399	200	280 360 440	520 600 680	760 840 920
161	6560	190	271 352 433	514 595 676	757 838 919
163	6723	180	262 344 426	508 590 672	754 836 918
165	6888	170	253 336 419	502 585 668	751 834 917
167	7055	160	244 328 412	496 580 664	748 832 916
169	7224	150	235 320 405	490 575 660	745 830 915
171	7395	140	226 312 398	484 570 656	742 828 914
173	7568	130	217 304 391	478 565 652	739 826 913
175	7743	120	208 296 384	472 560 648	736 824 912
177	7920	110	199 288 377	466 555 644	733 822 911
179	8099	100	190 280 370	460 550 640	730 820 910
181	8280	090	181 272 363	454 545 636	727 818 909
183	8463	080	172 264 356	448 540 632	724 816 908
185	8648	070	163 256 349	442 535 628	721 814 907
187	8835	060	154 248 342	436 530 624	718 812 906
189	9024	050	145 240 335	430 525 620	715 810 905
191	9215	040	136 232 328	424 520 616	712 808 904
193	9408	030	127 224 321	418 515 612	709 806 903
195	9603	020	118 216 314	412 510 608	706 804 902
197	9800	010	109 208 307	406 505 604	703 802 901
199	9999	000	100 200 300	400 500 600	700 800 900
	C	025	020 016 012	009 006 004	002 001 000

I.

N + n	A	640	641 642 643	644 645 646	647 648 649
			B		
0	0	102	102 103 103	103 104 104	104 104 105
2	1	742	743 745 746	747 749 750	751 752 754
4	5	382	384 387 389	391 394 396	398 400 403
6	11	022	025 029 032	035 039 042	045 048 052
8	18	662	666 671 675	679 684 688	692 696 701
10	28	302	307 313 318	323 329 334	339 344 350
12	39	942	948 955 961	967 974 980	986 992 999
14	53	582	589 597 604	611 619 626	633 640 648
16	69	222	230 239 247	255 264 272	280 288 297
18	86	862	871 881 890	899 909 918	927 936 946
20	106	502	512 523 533	543 554 564	574 584 595
22	128	142	153 165 176	187 199 210	221 232 244
24	151	782	794 807 819	831 844 856	868 880 893
26	177	422	435 449 462	475 489 502	515 528 542
28	205	062	076 091 105	119 134 148	162 176 191
30	234	702	717 733 748	763 779 794	809 824 840
32	266	342	358 375 391	407 424 440	456 472 489
34	299	982	999*017*034	*051*069*086	*103*120*138
36	335	622	640 659 677	695 714 732	750 768 787
38	373	262	281 301 320	339 359 378	397 416 436
40	412	902	922 943 963	983*004*024	*044*064*085
42	454	542	563 585 606	627 649 670	691 712 734
44	498	182	204 227 249	271 294 316	338 360 383
46	543	822	845 869 892	915 939 962	985*008*032
48	591	462	486 511 535	559 584 608	632 656 681
50	641	102	127 153 178	203 229 254	279 304 330
52	692	742	768 795 821	847 874 900	926 952 979
54	746	382	409 437 464	491 519 546	573 600 628
56	802	022	050 079 107	135 164 192	220 248 277
58	859	662	691 721 750	779 809 838	867 896 926
60	919	302	332 363 393	423 454 484	514 544 575
62	980	942	973*005*036	*067*099*130	*161*192*224
64	1044	582	614 647 679	711 744 776	808 840 873
66	1110	222	255 289 322	355 389 422	455 488 522
68	1177	862	896 931 965	999*034*068	*102*136*171
70	1247	502	537 573 608	643 679 714	749 784 820
72	1319	142	178 215 251	287 324 360	396 432 469
74	1392	782	819 857 894	931 969*006	*043*080*118
76	1468	422	460 499 537	575 614 652	690 728 767
78	1546	062	101 141 180	219 259 298	337 376 416
80	1625	702	742 783 823	863 904 944	984*024*065
82	1707	342	383 425 466	507 549 590	631 672 714
84	1790	982	*024*067*109	*151*194*236	*278*320*363
86	1876	622	665 709 752	795 839 882	925 968*012
88	1964	262	306 351 395	439 484 528	572 616 661
90	2053	902	947 993*038	*083*129*174	*219*264*310
92	2145	542	588 635 681	727 774 820	866 912 959
94	2239	182	229 277 324	371 419 466	513 560 608
96	2334	822	870 919 967	*015*064*112	*160*208*257
98	2432	462	511 561 610	659 709 758	807 856 906
	C	400	720 041 362	684 006 329	652 976 300

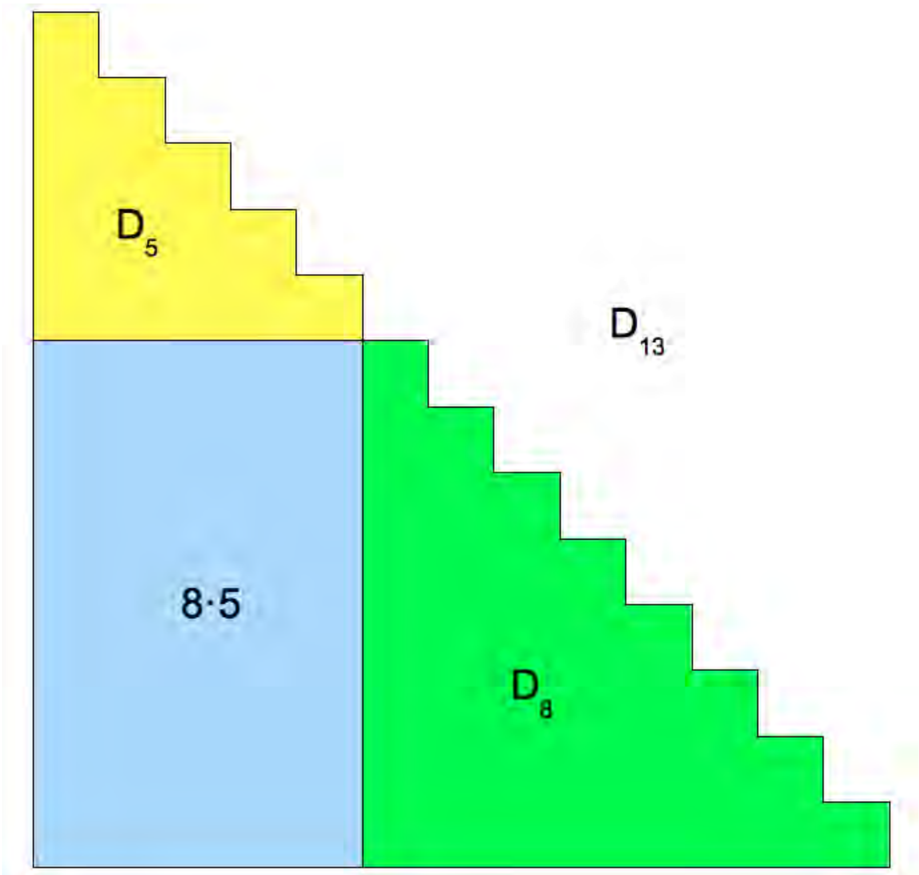
II.

N + n	A	640	641 642 643	644 645 646	647 648 649
			B		
1	0	672	673 674 674	675 676 677	678 678 679
3	3	312	314 316 317	319 321 323	325 326 328
5	7	952	955 958 960	963 966 969	972 974 977
7	14	592	596 600 603	607 611 615	619 622 626
9	23	232	237 242 246	251 256 261	266 270 275
11	33	872	878 884 889	895 901 907	913 918 924
13	46	512	519 526 532	539 546 553	560 566 573
15	61	152	160 168 175	183 191 199	207 214 222
17	77	792	801 810 818	827 836 845	854 862 871
19	96	432	442 452 461	471 481 491	501 510 520
21	117	072	083 094 104	115 126 137	148 158 169
23	139	712	724 736 747	759 771 783	795 806 818
25	164	352	365 378 390	403 416 429	442 454 467
27	190	992	*006*020*033	*047*061*075	*089*102*116
29	219	632	647 662 676	691 706 721	736 750 765
31	250	272	288 304 319	335 351 367	383 398 414
33	282	912	929 946 962	979 996*013	*030*046*063
35	317	552	570 588 605	623 641 659	677 694 712
37	354	192	211 230 248	267 286 305	324 343 361
39	392	832	852 872 891	911 931 951	971 990*010
41	433	472	493 514 534	555 576 597	618 638 659
43	476	112	134 156 177	199 221 243	265 286 308
45	520	752	775 798 820	843 866 889	912 934 957
47	567	392	416 440 463	487 511 535	559 582 606
49	616	032	057 082 106	131 156 181	206 230 255
51	666	672	698 724 749	775 801 827	853 878 904
53	719	312	339 366 392	419 446 473	500 526 553
55	773	952	980*008*035	*063*091*119	*147*174*202
57	[illegible]	592	621 650 678	707 736 765	794 822 851
59	889	[illegible]	[illegible]	[illegible] 381 411	441 470 500
61	949	872	903 934 964	995*026*057	*088*118*149
63	1012	512	544 576 607	639 [illegible] 703	735 766 798
65	1077	152	185 218 250	283 [illegible] 349	382 414 447
67	1143	792	826 860 893	927 [illegible] 995	*029*062*096
69	1212	432	467 502 536	571 [illegible] 641	676 710 745
71	1283	072	108 144 179	215 [illegible] 287	323 358 394
73	1355	712	749 786 822	859 [illegible] 933	970*006*043
75	1430	352	390 428 465	503 [illegible] 579	617 654 692
77	1506	992	*031*070*108	*147 [illegible] *225	*264*302*341
79	1585	632	672 712 751	791 [illegible] 871	911 950 990
81	1666	272	313 354 394	435 [illegible] 517	558 598 639
83	1748	912	954 996*037	*079 [illegible] *163	*205*246*288
85	1833	552	595 638 680	723 [illegible] 809	852 894 937
87	1920	192	236 280 323	367 [illegible] 455	499 542 586
89	2008	832	877 922 966	*011 [illegible] *101	*146*190*235
91	2099	472	518 564 609	655 [illegible] 747	793 838 884
93	2192	112	159 206 252	299 [illegible] 393	440 486 533
95	2286	752	800 848 895	943 [illegible] *039	*087*134*182
97	2383	392	441 490 538	587 [illegible] 685	734 782 831
99	2482	032	082 132 181	231 [illegible] 331	381 430 480
	C	400	220 041 862	684 506 329	152 976 800

130

c) Die Dreieckszahlen-Tafel von Joncourt

Bei der Ersetzung von Multiplikationen durch Additionen spielen die Dreieckszahlen ihre Trumpfkarte aus. Das Produkt xy lässt sich auf mehrere Arten als Summe von Dreieckszahlen schreiben. Eine bequeme Methode ist $xy = D_{x+y} - D_x - D_y$, wobei z.B. D_x die $x-te$ Dreieckszahl bedeutet. Beispiel: $8 \cdot 5$:



$8 \cdot 5 = D_{13} - D_5 - D_8 = 91 - 15 - 36 = 40$.
Bereits 1762 brachte Elie de Joncourt in den Niederlanden die wohl einzige Dreieckszahlen-Tafel heraus. Von A. Arnaudeau gibt es 1896 wenigstens eine Projektbeschreibung seines nie erschienenen Buches.

DE LA

NATURE

ET DES

PRINCIPAUX USAGES

DE LA

PLUS SIMPLE ESPECE

DE

NOMBRES TRIGONAUX.

Avec deux Tables arithmetiques, dont la premiere donne d'abord, & ſans la moinde peine, outre la ſolution de divers autres Problemes, la Racine quarrée de tout Quarré, exprimé par un Nombre entier, & ſitué entre l'Unité & quarante mille Millions. La ſeconde, qui n'eſt que de ſept pages, aide à trouver, auſſi facilement, la Racine cubique de tout Cube, exprimé par un Nombre entier, & ſitué entre l'Unité & deux cens ſeize mille Millions.

Ouvrage traduit du *Latin* de

MR. DE JONCOURT,

DOCTEUR ET PROFESSEUR EN PHILOSOPHIE,

Par l'Auteur même.

peragro loca, nullius ante
Trita ſolo, juvat integros accedere Fontes.
LUCR. IV. 2.

A LA HAYE,
CHEZ M. HUSSON.
M. D. CC. LXII.

Wie aus der Titelseite ersichtlich, hält sich Joncourt nicht bei der Multiplikation auf, sondern behandelt ausführlich das Wurzelziehen. Als Beispiel für die Multiplikation wählen wir $3961 \cdot 4041$.

45

N.Nat.	N. Trig.	N.Nat.	N. Trig.	N.Nat.	N. Trig.
3961	7846741	3991	7966036	4021	8086231
62	7850703	92	7970028	22	8090253
63	7854666	93	7974021	23	8094276
64	7858630	94	7978015	24	8098300
65	7862595	95	7982010	25	8102325
66	7866561	96	7986006	26	8106351
67	7870528	97	7990003	27	8110378
68	7874496	98	7994001	28	8114406
69	7878465	99	7998000	29	8118435
70	7882435	4000	8002000	30	8122465
71	7886406	4001	8006001	31	8126496
72	7890378	2	8010003	32	8130528
73	7894351	3	8014006	33	8134561
74	7898325	4	8018010	34	8138595
75	7902300	5	8022015	35	8142630
76	7906276	6	8026021	36	8146666
77	7910253	7	8030028	37	8150703
78	7914231	8	8034036	38	8154741
79	7918210	9	8038045	39	8158780
80	7922190	10	8042055	40	8162820
81	7926171	11	8046066	41	8166861
82	7930153	12	8050078	42	8170903
83	7934136	13	8054091	43	8174946
84	7938120	14	8058105	44	8178990
85	7942105	15	8062120	45	8183035
86	7946091	16	8066136	46	8187081
87	7950078	17	8070153	47	8191128
88	7954066	18	8074171	48	8195176
89	7958055	19	8078190	49	8199225
90	7962045	20	8082210	50	8203275

M 4051 | 8207326

89

N.Nat.	N. Trig.	N.Nat.	N. Trig.	N.Nat.	N. Trig.
7921	31375081	7951	31613176	7981	31852171
22	31383003	52	31621128	82	31860153
23	31390926	53	31629081	83	31868136
24	31398850	54	31637035	84	31876120
25	31406775	55	31644990	85	31884105
26	31414701	56	31652946	86	31892091
27	31422628	57	31660903	87	31900078
28	31430556	58	31668861	88	31908066
29	31438485	59	31676820	89	31916055
30	31446415	60	31684780	90	31924045
31	31454346	61	31692741	91	31932036
32	31462278	62	31700703	92	31940028
33	31470211	63	31708666	93	31948021
34	31478145	64	31716630	94	31956015
35	31486080	65	31724595	95	31964010
36	31494016	66	31732561	96	31972006
37	31501953	67	31740528	97	31980003
38	31509891	68	31748496	98	31988001
39	31517830	69	31756465	99	31996000
40	31525770	70	31764435	8000	32004000
41	31533711	71	31772406	8001	32012001
42	31541653	72	31780378	2	32020003
43	31549596	73	31788351	3	32028006
44	31557540	74	31796325	4	32036010
45	31565485	75	31804300	5	32044015
46	31573431	76	31812276	6	32052021
47	31581378	77	31820253	7	32060028
48	31589326	78	31828231	8	32068036
49	31597275	79	31836210	9	32076045
50	31605225	80	31844190	10	32084055

Z 8011 | 32092066

$D_{8002} = 32020003$, $D_{3961} = 7846741$ und $D_{4041} = 8166861$. Nach obiger Formel ergibt $32020003 - 16013602 = 16006401$.
Für die Berechnung von Produkten mit Faktoren bis 1000 benötigt man mit der Formel $xy = D_x + D_{y-1} - D_{x-y}$ nur noch 1000 Einträge in der Tabelle, also am wenigsten von allen drei hier vorgestellten Rechentafeln.

Aktivitäten

1. Rechne mit der Tabelle von Crelle $12 \cdot 562$.
2. Zeige, wie man mit der Methode von Crelle $93319 \cdot 33674$ berechnen kann (die Multiplikationen sind in Ermangelung der Tafeln mit dem TR zu ermitteln).
3. Erstelle mit einer Tabellenkalkulation oder mit *mathematica* eine einfache Viertelquadrat-Tabelle. Die Variable x läuft von $0.100, 0.101$, usw. bis 0.999. Welche Multiplikationen sind damit ausführbar? Schreibe eine Anleitung zur Benützung der Tabelle.
4. Beweise die Formel $xy = D_x + D_{y-1} - D_{x-y}$.
5. Ist die Formel richtig? $xy = D_{x-1} + D_y - D_{x-y-1}$. Veranschauliche!

6. Dreieckszahlen sind beliebte Objekte in der Mathematik. Wo kommen sie zum Einsatz?

7. Suche im Internet die drei hier besprochenen Rechentafeln. Was weiss man über die Autoren?