Einige Vertiefungsthemen zum Logarithmus

Albert A. Gächter

1. **Erdbeben**
   Richter-Skala; Beispiele

2. **Sternhelligkeit**
   Magnitudo; Beispiele

3. **Dimension von Fraktalen**
   Herleitung; Beispiele

4. **Mercatorkarte**
   Idee; Bedeutung

5. **Die Logarithmentabelle von Jost Bürgi**
   Aufbau und durchgerechnete Beispiele

6. **Logarithmen in der Menge der komplexen Zahlen**
   Unterschiede zum Logarithmus in der Menge der reellen Zahlen

7. **Musik und Logarithmen**
   „Klavier = tönender Rechenstab“

8. **Logarithmus einer Summe**
   Gegeben lga, lgb; gesucht lg(a+b)
   Muschel 1697, Cavalieri 1639, Wolf/J.Herrmann, ...

9. **Methoden, um Exponentialgleichungen zu lösen**
   Übersicht und Beispiele

10. **Rechenhilfen**
    Neperstäbe, Rechenschieber, ...

11. **Methode von Euler zur Berechnung des Logarithmus „von Hand“**
    siehe nächste Seiten

Euler und die Logarithmen

Albert A. Gächter

Im Jahre 2007 feierten wir den 300. Geburtstag des grossen Schweizer Mathematikers Leonhard Euler. Andreas Speiser hat einmal geschrieben: *Jeder Fischzug in seinen Werken liefert neue Beute. Seine Auffassung der Mathematik hat das meiste, was im 19. Jahrhundert galt, überdauert und wird mit jedem Tag moderner.* Werfen wir einen kurzen Blick auf seine Beschäftigung mit den Logarithmen!

Eulers bahnbrechendes Werk **Introductio in Analysin Infinitorum** (Einleitung in die Analysis des Unendlichen) ist, wie E. A. Fellmann in der Euler-Biographie schreibt, für Generationen zum Vorbild und Fundament der mathematischen Lehrbuchliteratur geworden. Darin entwickelte er das Konzept der Funktion (anstelle der älteren Kurvenvorstellung) und zeigte den Weg in eine moderne Funktionentheorie.

Wir verdanken Euler in seiner **Introductio** unter anderem folgende Beiträge zum Thema Logarithmus:

- eine sehr einfache Berechnung eines Logarithmus von Hand mit einigen netten Textaufgaben;
- die Einführung des Logarithmus als Inverse der Exponentialfunktion mit der Möglichkeit, diese Definition auch auf komplexe Zahlen auszudehnen;
- die Wörter *Basis* und *Mantisse*; Euler verwendete Mantisse als erster nur für die Dezimalstellen eines Logarithmus;
- die Entwicklung jeder Funktion (insbes. auch exp und log) in eine Potenzreihe (wobei nicht alles erschlossenes Neuland war).

Da sich seine Berechnung eines Logarithmus von Hand sehr gut für den gymnasialen Unterricht eignet, sei hier darauf eingegangen. Es ist ein starkes didaktisches Prinzip, erst dann den Taschenrechner für Funktionen einzusetzen, wenn man diese prinzipiell auch von Hand berechnen könnte. Das trifft insbesondere auf das Wurzelziehen (Heron), die Ermittlung eines Sinus (Winkeldreiteilung) und den Logarithmus zu. Historisch gesehen entwickelte sich das Logarithmieren aus der geschickten Gegenüberstellung einer geometrischen Folge (Numeri) und einer arithmetischen Folge (Logarithmen). Dem arithmetischen Mittel zweier Zahlen der aF entspricht das geometrische Mittel der entsprechenden Zahlen der gF. Mit dieser einfachen Idee arbeitet nun Euler und generiert eine Intervallschachtelung oder ein binary search.

In dieser Art und Weise hätten schon Briggs und Vlacq ihre Tafeln gerechnet, bemerkt Euler, was jedoch nicht ganz zutrifft (Briggs verwendete ebenfalls die beiden Mittel, setzte aber noch seine 'goldene Regel' ein).

Euler erstellt also eine Antilogarithmentabelle, indem er bei den Logarithmen jeweils das arithmetische Mittel und bei den entsprechenden Numeri das geometrische Mittel bildet. Von Hand sieht der Beginn folgendermassen aus:

		ſit
$A = 1,\ 000000;$	$lA = 0,\ 0000000$	
$B = 10,\ 000000;$	$lB = 1,\ 0000000;$	
$C = 3,\ 162277;$	$lC = 0,\ 5000000;$	$C = \sqrt{AB}$
$D = 5,\ 623413;$	$lD = 0,\ 7500000;$	$D = \sqrt{BC}$
$E = 4,\ 216964;$	$lE = 0,\ 6250000;$	$E = \sqrt{CD}$
$F = 4,\ 869674;$	$lF = 0,\ 6875000;$	$F = \sqrt{DE}$
$G = 5,\ 232991;$	$lG = 0,\ 7187500;$	$G = \sqrt{DF}$
$H = 5,\ 048065;$	$lH = 0,\ 7031250;$	$H = \sqrt{FG}$
$I = 4,\ 958069;$	$lI = 0,\ 6953125;$	$I = \sqrt{FH}$
$K = 5,\ 002865;$	$lK = 0,\ 6992187;$	$K = \sqrt{HI}$
$L = 4,\ 980416;$	$lL = 0,\ 6972656;$	$L = \sqrt{IK}$
$M = 4,\ 991627;$	$lM = 0,\ 6982421;$	$M = \sqrt{KL}$
$N = 4\ \ 997{:}42;$	$lN = 0,\ 6987304;$	$N = \sqrt{KM}$
$O = 5,\ 000052;$	$lO = 0,\ 6989745;$	$O = \sqrt{KN}$
$P = 4,\ 998647;$	$lP = 0,\ 6988525;$	$P = \sqrt{NO}$
$Q = 4,\ 999350;$	$lQ = 0,\ 6989135;$	$Q = \sqrt{OP}$
$R = 4,\ 999701;$	$lR = 0,\ 6989440;$	$R = \sqrt{OQ}$
$S = 4,\ 999876;$	$lS = 0,\ 6989592;$	$S = \sqrt{OR}$
$T = 4,\ 999963;$	$lT = 0,\ 6989668;$	$T = \sqrt{OS}$
$V = 5,\ 000008;$	$lV = 0,\ 6989707;$	$V = \sqrt{OT}$
$W = 4,\ 999984;$	$lW = 0,\ 6989687;$	$W = \sqrt{TV}$
$X = 4,\ 999997;$	$lX = 0,\ 6989697;$	$X = \sqrt{WV}$
$Y = 5,\ 000003;$	$lY = 0,\ 6989702;$	$Y = \sqrt{VX}$
$Z = 5,\ 000000;$	$lZ = 0,\ 6989700;$	$Z = \sqrt{XY}$

Berechnung von lg5

Euler schreibt lg als *l*

Kp. 6, S.76

Numeri		Logarithmen	
1		0	
gM(1,10)= 3.16	←	aM(0,1) = 0.5	← 1. Schritt
			← 3. Schritt
gM(3.16,10) = 5.62	←	aM(0.5,1)= 0.75	← 2. Schritt
10		1	

→ solange fortsetzen, bis links die 5 so genau wie gewünscht erreicht wird

Die beiden Folgen konvergieren zügig:

(Dank an Daniel Baumgartner für die folgende Graphik).

Schritt	Numeri-Folge g_k in [1,10]				Logarithmenfolge a_k in [0,1]		
		1				0	
1	gM(1,10)	= 3.16	$= g_1$	$\longrightarrow$	aM(0,1)	= 0.5	$= a_1$
3	gM(g_1,g_2)	= 4.21	$= g_3$	$\longrightarrow$	aM(a_1,a_2)	= 0.625	$= a_3$
4	gM(g_3,g_2)	= 4.86	$= g_4$	$\longrightarrow$	aM(a_3,a_2)	= 0.6875	$= a_4$
7	gM(g_4,g_6)	= 4.95	$= g_7$	$\longrightarrow$	aM(a_4,a_6)	= 0.6953125	$= a_7$
$\downarrow$		$\downarrow$				$\downarrow$	
$\vdots$		5				log(5)	
$\uparrow$		$\uparrow$				$\uparrow$	
6	gM(g_4,g_5)	= 5.04	$= g_6$	$\longrightarrow$	aM(a_4,a_5)	= 0.7031	$= a_6$
5	gM(g_4,g_2)	= 5.23	$= g_5$	$\longrightarrow$	aM(a_4,a_2)	= 0.71875	$= a_5$
2	gM(g_1,10)	= 5.62	$= g_2$	$\longrightarrow$	aM(a_1,1)	= 0.75	$= a_2$
		10				1	

	A	B	C	D	E	F
1	**Logarithmus nach Euler**					
2						
3	*Introductio in Analysin Infinitorum, 1748, Kp.6*					
4						
5	Berechnung von 10er-Logarithmen nach der Methode von Euler.					
6	Idee: aM für die Logarithmen; gM für die Numeri; binary search.					
7						
8						
9	Numerus:	5	numeri		logarithmen	
10						
11			1.000000	10.000000	0.0000000	1.0000000
12			3.162278	10.000000	0.5000000	1.0000000
13			3.162278	5.623413	0.5000000	0.7500000
14			4.216965	5.623413	0.6250000	0.7500000
15			4.869675	5.623413	0.6875000	0.7500000
16			4.869675	5.232991	0.6875000	0.7187500
17			4.869675	5.048066	0.6875000	0.7031250
18			4.958068	5.048066	0.6953125	0.7031250
19			4.958068	5.002865	0.6953125	0.6992188
20			4.980416	5.002865	0.6972656	0.6992188
21			4.991628	5.002865	0.6982422	0.6992188
22			4.997243	5.002865	0.6987305	0.6992188
23			4.997243	5.000053	0.6987305	0.6989746
24			4.998648	5.000053	0.6988525	0.6989746
25			4.999350	5.000053	0.6989136	0.6989746
26			4.999702	5.000053	0.6989441	0.6989746
27			4.999877	5.000053	0.6989594	0.6989746
28			4.999965	5.000053	0.6989670	0.6989746
29			4.999965	5.000009	0.6989670	0.6989708
30			4.999987	5.000009	0.6989689	0.6989708
31			4.999998	5.000009	0.6989698	0.6989708
32			4.999998	5.000004	0.6989698	0.6989703
33			4.999998	5.000001	0.6989698	0.6989701
34			4.999999	5.000001	0.6989700	0.6989701
35			4.999999	5.000000	0.6989700	0.6989700
36			5.000000	5.000000	0.6989700	0.6989700

Diese Tabelle lässt sich also bequem auch mittels Tabellenkalkulation berechnen.

Euler ist sich aber bewusst, dass es schnellere Verfahren gibt. Er bemerkt anschliessend noch, dass es genügt, die Logarithmen der Primzahlen zu berechnen. Interessant ist die Feststellung, dass man um 1875 über 550 verschiedene Logarithmentafeln zählte!
Eine Frage bleibt jedoch offen: Wie haben Briggs und Euler die Quadratwurzeln berechnet? Dies ist aber eine andere (spannende) Geschichte.

Referenz:

Fellmann E.A.: Leonhard Euler. rororo Monographie, 1995
Originaltexte der Introductio in Lat./ Engl./ Franz. im Internet