Die Jongleur-Folge

Albert A. Gächter, 2011

Die Jongleur-Folge (juggler sequence) wurde von C.A. Pickover erfunden und in seinem 1991 erschienenen Buch *Computers and the Imagination* beschrieben. So wie die Bälle eines Jongleurs sich auf und ab bewegen, gebärden sich die Glieder dieser Folge.
Beispiel: 9, 27, 140, 11, 36, 6, 2, 1
Es ist nicht ganz einfach, das Bildungsgesetz selber heraus zu finden. Es lautet:

$$a_n = \begin{cases} [\sqrt{n}] & \text{für } n \text{ gerade} \\ \left[\sqrt{n^3}\right] & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

(Die eckigen Klammern bedeuten die grösste ganze Zahl kleiner oder gleich des in der Klammer berechneten Wertes).
In *mathematica* erhält man:

```
J[n_] := If[EvenQ[n], Floor[Sqrt[n]], Floor[Sqrt[n^3]]];
```

So wird J[9] = 27 und J[27] =140.

```
J[J[J[J[48443]]]]

523578821252958052233532
```

Die ganze Folge ergibt sich mit:

```
jongleur[n_] := NestWhileList[J, n, # ≠ 1 &];

jongleur[9]

{9, 27, 140, 11, 36, 6, 2, 1}
```

Nach der Veröffentlichung des Buches beschäftigten sich zahlreiche Interessenten mit der Jongleur-Folge. Harry J. Smith schrieb am 27.6.1992 an Pickover:
I have now computed a larger juggler number. It is a 972,463-digit super giant for the starting number 48443. The entire juggler sequence starting from 48443 was computed in 28 hours.
Um diese grosse Zahl mit dem Computer zu berechnen, schrieb er ein eigenes Programm. Heute erledigt *mathematica* dies in ca. 10 Minuten auf einem mittelmässigen Rechner.

```
jongleur[48 443]
```

A very large output was generated. Here is a sample of it:

```
{48 443, 10 662 193, 34 815 273 349, 6 496 130 099 313 865,
 523 578 821 252 958 052 233 532, 723 587 466 207, 615 512 041 010 804 067,
 482 897 358 660 562 651 148 793 788, 21 974 925 680 433, 103 012 783 516 625 098 121,
 1 045 530 445 028 727 953 685 811 220 915, <<136>>, 1 544 131,
 1 918 784 550, 43 803, 9 167 602, 3027, 166 540, 408, 20, 4, 2, 1}
```

Show Less | Show More | Show Full Output | Set Size Limit...

Die grösste Zahl in der Folge hat wie erwähnt 972 463 Ziffern. Der folgende output wird deshalb unterdrückt.

```
Max[jongleur[48 443]];

IntegerLength[Max[jongleur[48 443]]] // Timing
```

```
{600.891, 972 463}
```

Mein Rechner benötigt etwa 10 Minuten, um die Zahl und deren Länge zu berechnen. Die Jongleur-Folge zur Startzahl 48443 besitzt 158 Glieder.

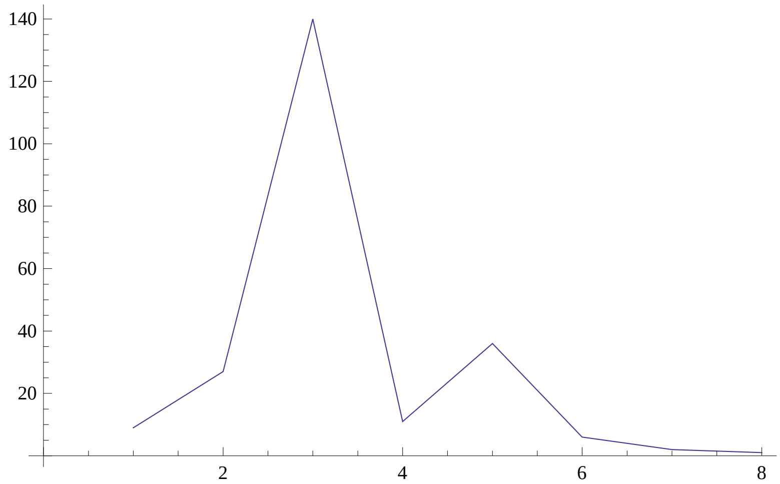
```
Length[jongleur[48 443]]
```

```
158
```

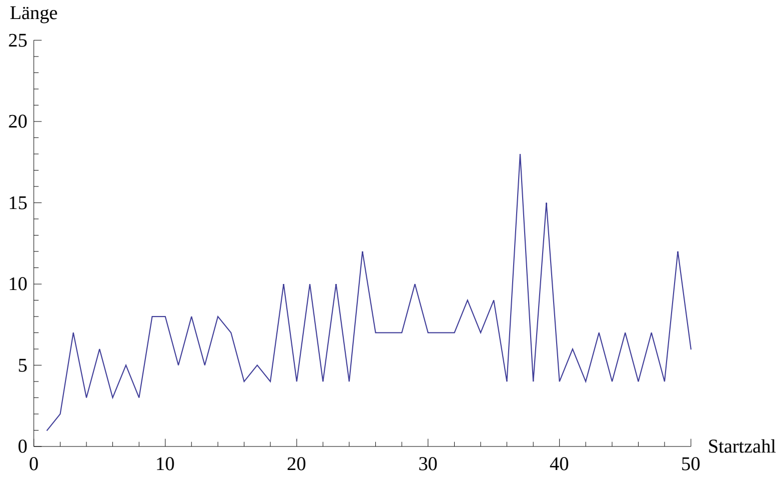
```
jongleur /@ Range[5] // ColumnForm
```

```
{1}
{2, 1}
{3, 5, 11, 36, 6, 2, 1}
{4, 2, 1}
{5, 11, 36, 6, 2, 1}
```

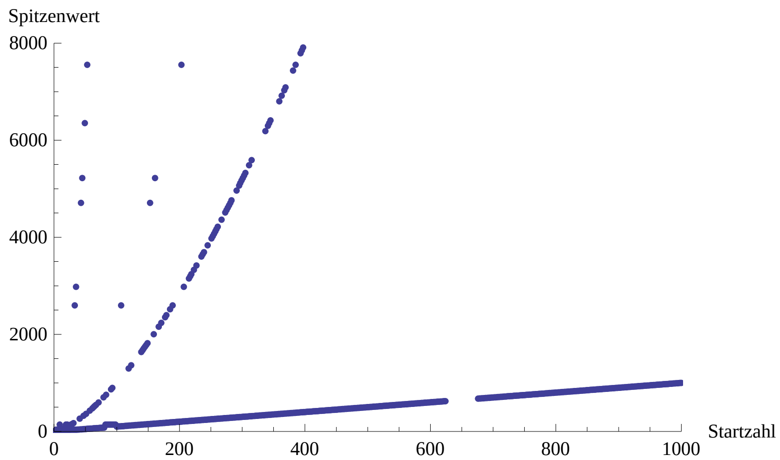
```
ListPlot[jongleur[9], Joined → True, PlotRange → All]
```



```
ListPlot[Length[#] & /@ Table[jongleur[n], {n, 50}], Joined → True,
 AxesLabel → {"Startzahl", "Länge"}, PlotRange → {{0, 50}, {0, 25}}]
```




```
ListPlot[Max[#] & /@ Table[jongleur[n], {n, 1000}],
 AxesLabel → {"  Startzahl", "Spitzenwert"}, PlotRange → {{0, 1000}, {0, 8000}}]
```



Die Jongleur-Folge hat verwandtschaftliche Beziehungen zur Hagelkorn-Folge (Collatz-Folge). Einige Definitionen lassen sich problemlos übernehmen. Wegen der Wurzelausdrücke ist aber eine unkomplizierte Zahlbereichserweiterung nicht möglich. Daher gibt es keine Jongleur-Fraktale!
stoppingnumber ist das erste Glied in der Folge, welches kleiner als die Startzahl ist.

```
stoppingnumber[n_] := First[Select[jongleur[n], # < n &]]
```

```
stoppingtime[n_] := Length[NestWhileList[js, n, # > stoppingnumber[n] &]]
```

```
stoppingnumber[27]
```

```
11
```

```
stoppingtime[27]
```

```
2
```

Bis heute ist nicht geklärt, ob jede Jongleur-Folge bei 1 endet.
Wegen der grossen Zahlen braucht es ein potentes Werkzeug, wenn man Jongleur-Folgen untersuchen will. Daher eignen sich Taschenrechner oder Tabellenkalkulationen wenig.

Aktivitäten

1. Gibt es Jongleur-Folgen, welche monoton gegen 1 fallen?
2. Berechne die Jongleur-Folge für n=193.
3. Jongleur-Folgen enden auf 4 2 1, 6 2 1 oder 8 2 1. Gibt es noch andere?
4. Entwickle ein Tabellenkalkulationsblatt, welches Jongleur-Folgen erzeugt. Welche grossen Zahlen lassen sich nicht mehr darstellen?
5. Erstelle eine Liste der Jongleur-Folgen für n = 1,...,20 mit der jeweiligen Anzahl Glieder und dem höchsten Wert.
6. Welches ist die kleinste Startzahl für eine Jongleur-Folge mit genau 10 Gliedern?