Pythagoras mit Huygens

Albert A. Gächter

Im Jahre 1657 hat Christiaan Huygens einen eigenständigen Beweis für den Satz von Pythagoras angegeben. Ich bin bei der Suche nach einer bestimmten Stelle in seinem Werk zufällig darauf gestossen. Die originelle Art des Beweises hat mich sofort begeistert. Da Huygens sehr selten mit Pythagoras in Beziehung gebracht wird, möchte ich hier das originale Dokument vorstellen. Im Buch *The Pythagorean Proposition* von Elisha Scott Loomis aus dem Jahre 1928 figuriert der Beweis von Huygens unter den 370 Beweisen als Nummer 31.

Thirty-One

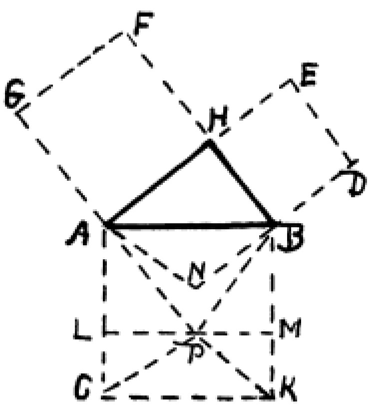


Fig. 132

Extend GA making AP = AG; extend DB making BN = BD = CP. Tri. CKP = tri. ANB = $\frac{1}{2}$ sq. HD = $\frac{1}{2}$ rect. LK. Tri. APB = $\frac{1}{2}$ sq. HG = $\frac{1}{2}$ rect. AM. Sq. AK = rect. AM + rect. LK.

∴ sq. upon AB = sq. upon HB + sq. upon AH. ∴ $h^2 = a^2 + b^2$. Q.E.D.

a. This is Huygens' proof (1657); see also Versluys, p. 25, fig. 22.

Wie damals üblich, ist die Abhandlung von Huygens in Latein abgefasst (Die zwei Seiten sind am Schluss dieses Dokumentes abgedruckt). Um allen Lesern den Zugang zu ermöglichen, habe ich eine eigene Übersetzung erstellt.

Übersetzung (Albert A. Gächter)

Aug. 1657
Mein Beweis des Satzes 47 im 1. Buch von Euklid. *Dies ist Euklids Beweis des Pythagoras.*

Es sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit dem rechten Winkel ABC gegeben. Ich behaupte, dass das Quadrat über AC gleich gross ist wie die beiden Quadrate über AB und BC zusammen.

Über AC werde nämlich das Quadrat ADEC gezeichnet.; ebenso über AB und BC die Quadrate AH und CF. *(Rechtecke werden stets mit gegenüberliegenden Ecken angegeben)*

Die Strecke IA werde bis L so verlängert, dass AL = AI ist, und L mit C verbunden, gleicherweise werde CG bis K so verlängert, dass CK = CG, und K mit A verbunden; es werden auch die Verbindungen KE, KD gezogen und durch K wird die Strecke MN parallel zu AC gezeichnet.

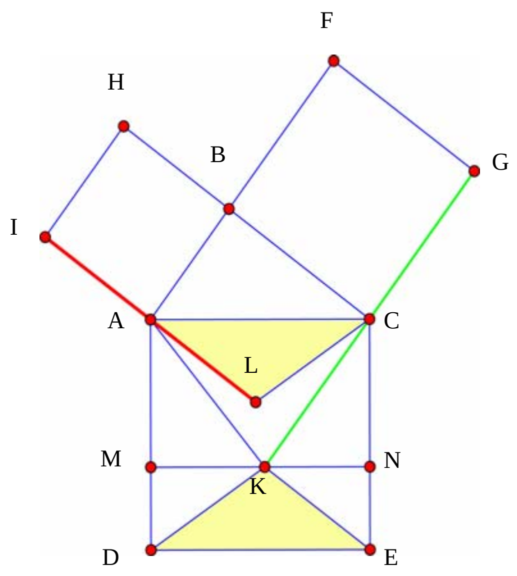
Da die Winkel ABC und CBF beide rechte sind, ist FBA geradlinig und selber parallel zu GK. Weil sich deshalb das Quadrat GB und das Dreieck CAK zwischen denselben Parallelen befinden und die gleichen Grundlinien GC und CK besitzen, ist das Quadrat GB doppelt so gross wie das Dreieck CAK. Aber auch das Rechteck AN ist doppelt so gross wie dieses Dreieck AKC, da beide zwischen denselben Parallelen AC und MN liegen und dieselbe Grundlinie AC besitzen. Daher ist das Rechteck AN gleich gross wie das Quadrat GB.

Es bleibt zu zeigen, dass das Rechteck DN gleich gross ist wie das Quadrat AH.

Subtrahiert man bei beiden rechten Winkeln ACE und BCK den gemeinsamen Winkel ACK, wird der Winkel KCE gleich gross wie BCA und in der Tat jede Seite EC, CK gleich lang wie AC, CB, natürlich entsprechend aufeinander bezogen. Die verbleibende Seite KE ist gleich lang wie die verbleibende Seite AB und der Winkel KEC gleich wie BAC *(falsches Zitat).*

Deshalb bleiben die unter sich gleichen Winkel KED und LAC übrig, wenn man vom rechten Winkel DEC den Winkel KEC und vom rechten Winkel BAL den Winkel BAC wegnimmt.

Aber es wurde gezeigt, dass KE = AB ist und diese ist gleich AL: und ED = AC. Weil daher das Dreieck KED zwei gleich Seiten besitzt wie das Dreieck LAC und der Winkel KED gleich gross ist wie LAC, sind beide Dreiecke unter sich gleich. Es ist daher das Rechteck DN zweimal so gross wie das Dreieck KDE, weil beide dieselbe Grundlinie und dieselbe Höhe haben; das Quadrat AH ist sicher doppelt so gross wie das Dreieck LAC, weil beide zwischen den Parallelen HC und IL liegen und dieselben Grundlinien LA und AI besitzen. Daher ist notwendigerweise das Rechteck DN gleich gross wie das Quadrat AH. Aber es wurde bereits gezeigt, dass das Rechteck MC gleich dem Quadrat CF ist. Daher wird das ganze Quadrat DC gleich gross wie die beiden Quadrate CF und AH zusammen; w.z.b.w.



Aktivitäten

1. Halte schriftlich die wichtigsten Ideen beim Beweis des Pythagoras von Huygens fest.

2. Projekt *Mathematik – Latein*:
   Übersetze den Originaltext von Huygens vom Lateinischen ins Deutsche.

3. Verwandle mit der Idee von Huygens ein Quadrat mit der Seitenlänge 6 cm in ein flächengleiches Rechteck der Länge 9 cm.

4. Formuliere ein Rezept, wie man mit der Idee von Huygens ein beliebiges Rechteck in ein flächengleiches Quadrat verwandeln kann. Führe die Konstruktion aus für ein Rechteck mit a = 8 cm und b = 5 cm.
   Vergleiche mit andern Konstruktionsverfahren.

5. Konstruiere mit einer dynamischen Geometrie-Software die Beweisfigur von Huygens. Das rechtwinklige Dreieck ABC soll im „Zugmodus“ verändert werden können.

6. Studiere den Beweis des Pythagoras im Werk des Euklid (1. Buch, § 47). Gibt es Parallelen zum Beweis von Huygens? Hinweis: Drehe das Quadrat ADEC bei Huygens um 90° im Uhrzeigersinn.

32 Erstes Buch.

§ 47 (L. 33).

Am rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seite den Quadraten über den den rechten Winkel umfassenden Seiten zusammen gleich.

ABC sei ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel BAC. Ich behaupte, daß $BC^2 = BA^2 + AC^2$.

Man zeichne nämlich über BC das Quadrat $BDEC$ (I, 46) und über BA, AC die Quadrate GB, HC; ferner ziehe man durch A $AL \parallel BD$ oder CE und ziehe AD, FC.

Da hier die Winkel BAC, BAG beide Rechte sind, so bilden an der geraden Linie BA im Punkte A auf ihr die zwei nicht auf derselben Seite liegenden geraden Linien AC, AG Nebenwinkel, die zusammen = 2 R. sind; also setzt CA AG gerade fort (I, 14). Aus demselben Grunde setzt auch BA AH gerade fort. Ferner ist $\angle DBC = FBA$; denn beide sind Rechte (Post. 4); daher füge man ABC beiderseits hinzu; dann ist der ganze Winkel DBA dem ganzen FBC gleich (Ax. 2). Da ferner $DB = BC$ und $FB = BA$ (I, Def. 22), so sind zwei Seiten DB, BA zwei Seiten FB, BC (überkreuz) entsprechend gleich; und $\angle DBA = \angle FBC$; also ist Grdl. AD = Grdl. FC und $\triangle ABD = \triangle FBC$ (I, 4). Ferner ist Pgm. $BL = 2 \triangle ABD$; denn sie haben dieselbe Grundlinie BD und liegen zwischen denselben Parallelen BD, AL (I, 41); auch ist das Quadrat $GB = 2 \triangle FBC$; denn sie haben wieder dieselbe Grundlinie, nämlich FB, und liegen zwischen denselben Parallelen FB, GC. [Von Gleichem die Doppelten sind aber einander gleich (Ax. 5).] Also ist Pgm. BL = Quadrat GB. Ähnlich läßt sich, wenn man AE, BK zieht, zeigen, daß auch Pgm. CL = Quadrat HC; also ist das ganze Quadrat $BDEC$ den zwei Quadraten $GB + HC$ gleich (Ax. 2). Dabei ist das Quadrat $BDEC$ über BC gezeichnet und GB, HC über BA, AC. Also ist das Quadrat über der Seite BC den Quadraten über den Seiten BA, AC zusammen gleich — S.

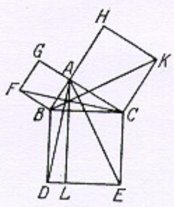
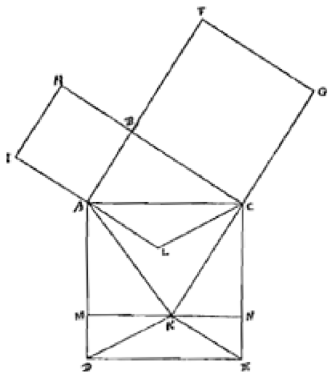


Fig. 46.

V[1].
[1657].

Aug. 1657.

Demonstratio mea Propos.**[is]* **47** ***lib. **1** ***Euclidis.***



Esto triangulum rectangulum ABC rectum habens angulum ABC. Dico quadratum ex AC aequale esse quadratis ex AB, et ex BC simul sumptis.

Describatur enim super AC quadratum ADEC; super AB vero et BC quadrata AH, CF. Et producatur IA usque in L ut sit AL aequalis AI, et jungatur LC, similiter producatur CG in K, ut sit CK aequalis CG, et jungatur KA; et ducantur etiam KE, KD, et per K agatur MN parallela AC.

Quoniam itaque anguli ABC, CBF, uterque recti sunt, recta linea est FBA: estque ipsi parallela GK. Quamobrem cum inter easdem parallelas sint quadratum GB et triangulum CAK, habeantque bases GC, CK aequales, erit trianguli CAK duplum quadratum GB. Sed et rectangulum AN, duplum est ejusdem trianguli AKC,

1) La Pièce occupe la p. 47 du Manuscrit K. Une traduction hollandaise fut publiée par J. Versluys aux p. 25-26 de l'ouvrage 'Zes en negentig bewijzen voor het theorema van Pythagoras, verzameld en gerangschikt door J. Versluys, Amsterdam, 1914, A. Versluys.' Comme M. Versluys le fait remarquer, il est bien curieux que parmi les démonstrations nombreuses du théorème de Pythagore, qu'on a inventées plus tôt ou plus tard, aucune n'est identique avec celle de Huygens.

cum sint inter easdem parallelas AC, MN, habeantque basin eandem AC. Igitur rectangulum AN aequale est quadrato GB. Superest ut ostendatur rectangulum DN aequale quadrato AH. Quoniam itaque angulus uterque ACE, BCK rectus est, ablato communi angulo ACK, fiet KCE aequalis angulo BCA, verum et utrumque latus EC, CK aequale est utrique AC, CB, singula nimirum singulis. Ergo et reliquum latus KE aequale erit reliquo AB, et angulus KEC aequalis angulo BAC[*]. Quare et ablato angulo KEC ab angulo recto DEC; angulo vero BAC ab angulo recto BAL, relinquentur anguli inter se aequales KED, LAC. Sed ostensa est KE aequalis AB, hoc est ipsi AL: et ED aequalis est ipsi AC. Itaque cum triangulum KED, duo latera habet aequalia duobus lateribus trianguli LAC, et angulum KED aequalem angulo LAC, erunt haec triangula inter se aequalia. Est autem trianguli KDE duplum rectangulum DN, cum eandem habeant basin DE et eandem altitudinem; trianguli vero LAC duplum est quadratum AH cum sint inter easdem parallelas HC, IL constituta, et bases aequales habeant LA, AI. Itaque necesse est rectangulum DN aequari quadrato AH. Sed et rectangulum MC aequale ostensum est quadrato CF. Ergo apparet quadratum totum DC aequari utrique simul quadrato CF, AH; quod erat demonstr.

[*] 8. *primi*[2].

2) Il s'agit en vérité de la quatrième (et non pas de la huitième) Proposition du premier Livre des ‘Elementa’ d'Euclide: ‘Si duo triangula duo latera duobus lateribus aequalia habeant, vtrumque vtrique; habeant vero & angulum angulo aequalem sub aequalibus rectis lineis contentum: Et basim basi aequalem habebunt: eritque triangulum triangulo aequale; ac reliqui anguli reliquis angulis aequales erunt, vterque vtrique, sub quibus aequalia latera subtenduntur.’ (Clavius, ed. 1507, p. 41.)