Fundamentale Ideen der Mathematik

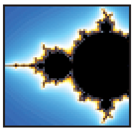
Albert A. Gächter

Vielen Schülerinnen und Schülern erscheint die Mathematik als ein Einheitsbrei von Formeln, Regeln und Sätzen, mehrheitlich unstrukturiert und grau. Sie bekunden Mühe zu erklären, was das Ganze zusammenhält und wo wichtige Ideen zur Sprache kommen. Seit ungefähr 35 Jahren denkt man in der Mathematikdidaktik über fundamentale Ideen intensiver nach. Ausgelöst durch J. Bruners *Der Prozess der Erziehung* im Jahre 1973 richtete man das Augenmerk auf grundlegende mathematische Konzepte, welche den Unterricht auf jeder Altersstufe prägen sollten. Der Weg war steinig und drohte sich im curricularen Dickicht zu verlieren. Dank der Arbeiten von Wittmann, Schwill, Schweiger, Vollrath und andern gelang es in den letzten Jahren, mit neuen Impulsen die Diskussion voran zu treiben.

Gemäss Umschreibung sind fundamentale Ideen ein Ansatz zur Strukturierung und schaffen Ordnung und Übersicht im Stoffangebot der Mathematik. Sie helfen den Unterricht inhaltlich zu gliedern und bilden ein „geistiges Band“ (H. Winter). Dadurch wird ein besseres und tieferes Verständnis von Mathematik erreicht. Fundamentale Ideen sind eine Antwort auf die Stofffülle. Stoffdruck ist stets hausgemacht. Das Durchdenken der Inhalte bildet eine gute Möglichkeit, Wichtiges von Unwichtigem zu trennen.

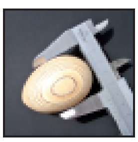
Sollte Ihnen die folgende Liste fundamentaler Ideen nicht vollumfänglich zusagen, haben Sie vermutlich bereits den ersten Schritt zum Überdenken des eigenen Unterrichtes gewagt. Nochmals: Einen weltweiten Konsens über die Anzahl oder die Art der Ideen gibt es nicht.

Mein Katalog fundamentaler Ideen (Mathematik):



ALGORITHMUS

Rechenverfahren gehören zu den Grundfertigkeiten. In allen Lehrplänen sind sie gegenwärtig. Durch den Einsatz des Taschenrechners oder Computers erhalten die Algorithmen einen neuen Stellenwert (Fragen bezüglich Korrektheit, Schnelligkeit und Reichweite).
Im Zentrum stehen der sichere Umgang mit Zahlen, das Buchstabenrechnen und das Lösen von Gleichungen. In diesem Zusammenhang tauchen berühmte Namen auf, z.B. Heron, Euklid, al-Khwarizmi, Sierpinski.

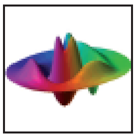


METRIK

Die fundamentale Idee METRIK zeigt viele Facetten. Messen heisst vergleichen. Die Geschichte der Mathematik zeigt, wie das Messen auf immer kompliziertere Objekte ausgedehnt wurde. Messen hat sehr oft mit den Begriffen Abstand und Distanz zu tun.
Verschiedene Messverfahren sind im Mathematikunterricht anzutreffen (Daumensprung, Scheibchenmethode, Intervallschachtelung usw.).
Schätzen und Approximieren wollen gelernt und geübt sein. Viel Raum in vielen Lehrmitteln nehmen die geometrischen Örter ein. Als Kontrast zum üblichen Distanzbegriff bietet sich die Taximetrik an.

MITTE

Mitte ist ein schillernder Begriff. Es muss stets klar definiert werden, was man unter der Mitte von Objekten (Figuren, Zahlenmengen usw.) versteht. Die Statistik kennt verschiedene Mittelwerte. In der Geometrie sind die Begriffe mittlere Proportionale, Mittelpunkt, Mittelsenkrechte und Schwerpunkt wichtig.

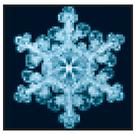


OPTIMIERUNG

Optimieren gehört zu den beliebten Tätigkeiten des Menschen. Möglichst viel Gewinn, möglichst wenig Aufwand, möglichst zahlreiche Vorteile und nach Möglichkeit einen minimalen Zeitaufwand. Die Mathematik stellt eine reiche Palette an Verfahren zur Verfügung, um Optimierungen vorzunehmen. Oft erweisen sich einfach formulierbare Minimax-Probleme bei der Lösung als sehr störrisch. Berühmte Stichworte für Optimierungs-Probleme sind Isoperimetrie, kürzeste Wege, lineare Optimierung und Kugel-Packungen.

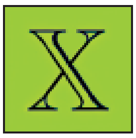
STEIGUNG

Der Steigungsbegriff bildet den Schlüssel für die so genannte Analysis, ein zentrales Gebiet der Mathematik. Ausgehend von der Geraden, wird die Steigung für beliebige Kurven definiert. Nebst vielen Anwendungen im Alltag (Kartographie, Steigungen von Bahnen, usw.) gehören lineare Gleichungen, Proportionalität, Gradient oder Wachstum dazu. Starke Begleiterin der Steigung ist die Krümmung, welche am Gymnasium leider ein Schattendasein fristet.



SYMMETRIE

Mit Symmetrie verbinden wir im Alltag immer auch Schönheit, Wohlproportioniertheit und Ebenmass. „Denkt Gott symmetrisch?“ heisst ein Buch von Ian Stewart, wo Symmetrie als Erklärung für die Regelmässigkeit der Natur heran gezogen wird. In der Geometrie beschreibt Symmetrie eine wichtige Eigenschaft von Figuren. Die verschiedenen Arten von Symmetrie sind mit den entsprechenden Abbildungen gekoppelt, welche solche symmetrische Figuren unverändert lassen. Als Einteilungsprinzip gestattet Symmetrie Ordnung zu schaffen.

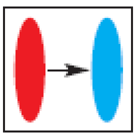


VARIABLE

Die Idee der Variablen gehört zu den genialsten mathematischen Erfindungen des Menschen. Einen „Platzhalter“, eine „Unbekannte“ für Elemente aus einer Grundmenge zu setzen, eröffnet den Zugang zum Buchstabenrechnen, zu Gleichungen und zu den Funktionen. Variable machen die mathematische Sprache einfacher und kompakter. Sie bilden eine Art von „Stenographie“.

ZAHL

Lesen, Schreiben und Rechnen gehören zu den grundlegenden Kulturtechniken. Seit der pythagoräischen These, dass die Zahl der Urgrund für alles Existierende ist („Alles ist Zahl“) hat sich bis heute die Bedeutung der Zahlen gehalten. Das digitale Zeitalter kommt dem Ideal der Pythagoräer wieder sehr nahe. Im Laufe der Jahrhunderte drang die Zahl in fast alle Bereiche des täglichen Lebens ein (Musik, Politik, Wirtschaft, Wissenschaft, Sport usw.).
Wegmarken sind: Zahlbereichserweiterungen, Rechnen mit Resten, Eigenschaften von Zahlen (Teilbarkeit, Figurenzahlen), zählen und Bestimmung von Anzahlen (Kombinatorik).



ZUORDNUNG

Der Bezug von Elementen einer Menge zu Elementen einer andern Menge heisst Zuordnung, Relation, Funktion oder Abbildung je nach den Auflagen, welche für diesen Bezug gemacht werden. Funktionen nennt man in der Geometrie Abbildungen, um die Tätigkeit in den Vordergrund zu rücken. Es ist wichtig, sorgfältig in die verschiedenen Klassen von Funktionen und Abbildungen einzuführen. Neben den Darstellungsarten stehen die Eigenschaften im Vordergrund. In der Geometrie finden wir die Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen, am Gymnasium ergänzt durch affine Abbildungen. Die Algebra zeigt mit den Zahlenfolgen eine spezielle Art von Funktionen. Lineare, quadratische und exponentielle Zuordnungen können bereits auf der Sekundarstufe I gut gepflegt werden.

ZUFALL

Die Mathematik hat den Zufall berechenbar gemacht. In der Wahrscheinlichkeitsrechnung gelingt es, zufälligen Ereignissen einen Wert zwischen 0 und 1 zuzuordnen und damit vergleichbar zu machen. Gute Modelle erlauben, Prognosen für die Zukunft zu erstellen und geben z.B. Versicherungen die nötige Sicherheit. Für Simulationszwecke eignet sich die Monte Carlo Methode, welche in vielen Wissenschaften ein beliebtes Instrument geworden ist. Die wichtige Erkenntnis der Chaostheorie lautet, dass deterministische Ursachen zufällige Wirkungen haben können.

VEKTOR

Vektoren sind Objekte im Duopack: Neben der Grösse besitzen sie auch eine Richtung. Sie bilden die Sprache für grosse Teile der Physik und der Mathematik. In der geometrischen Algebra werden Vektoren für beliebige Dimensionen und mit neuen Operationen definiert.

Fundamentale Ideen der Informatik

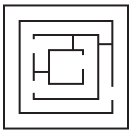
Albert A. Gächter

Wenn wir uns fragen, was bei der Informatik zur Allgemeinbildung gehört, so müssen es Dinge sein, die auch noch in 20 Jahren genau gleich wichtig und aktuell sein werden wie heute… Wir sollten uns auf das Wesentliche konzentrieren: auf Algorithmen und Datenstrukturen.

Prof. Walter Gander, ETH Zürich, NZZ Nr. 145 vom 25.6.1992

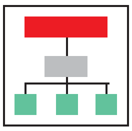
Im Klartext: Es geht wieder um zentrale Ideen. Die vier Eigenschaften fundamentaler Ideen gelten natürlich auch für die Informatik. Man muss aber berücksichtigen, dass die Geschichte der Informatik noch sehr jung ist.
In der schnelllebigen Hard- und Softwarewelt dürfen also kurzfristige Kenntnisse und Anwenderfertigkeiten nicht das Ziel sein. Ein Überdenken der Geschichte der Informatik zeigt, was dem rasanten Wandel standgehalten hat: hier liegen die Ansätze für fundamentale Ideen!

Mein Katalog fundamentaler Ideen (Informatik):



ALGORITHMISIERUNG

Durch die Entwicklung des Computers ist die Bedeutung des Begriffes „Algorithmus" gestiegen. Alles, was der Computer ausführt, ist eine Abfolge von Algorithmen. Dies heisst, dass dem Entwurf von Rechenverfahren grosse Bedeutung zukommt. Im Informatikunterricht wird man wichtige Algorithmen (Euklidischer Algorithmus, Heron-Verfahren, Sortieren usw.) sorgfältig studieren und ihre Vor- und Nachteile herausarbeiten. Die vom Computer ausgeführten Algorithmen sind zu einem wichtigen Werkzeug für die Bewältigung mathematischer Probleme geworden.

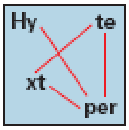


DATENTYPEN UND -STRUKTUREN

In der Informatik verarbeitet man unterschiedliche Daten und legt für jede Sorte bestimmte Regeln fest. Für einen Grundkurs reichen die Typen *Text, Zahl, Variable und Bild.*
Es ist auch in einer Tabellenkalkulation und dynamischen Geometrie-Software wichtig, die Datenstrukturen zu kennen. So baut sich eine Tabellenkalkulation im Wesentlichen aus den Datentypen Formel, Zahl, Datum und Text auf. In einer DGS treffen wir die Datentypen Punkt, Gerade, Kreis und Zahl an.

CODIERUNG

Um Probleme dem Computer zur Bearbeitung zu übergeben, durchlaufen sie eine Fülle von Codierungen bis hin zur Maschinensprache. Im Alltag sind wir uns der zahlreichen Codes gar nicht mehr bewusst. Speziell erwähnenswert sind Prüfziffern, das Dualsystem und der ASCII-Code.

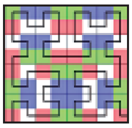


HYPERTEXT

Gegenüber der linearen Informationsvermittlung, z.B. in einem gedruckten Buch, bietet Hypertext die Möglichkeit der Navigation im Text. Diese Struktur gleicht eher der Funktionsweise des menschlichen Denkens. Das gesamte World Wide Web ist ein Beispiel für einen komplexen Hypertext. Das gezielte Auffinden von Informationen kann mit entsprechenden Suchstrategien gemildert werden. Der Einsatz von dynamischen Arbeitsblättern eröffnet auch für die Schule neue attraktive Möglichkeiten.

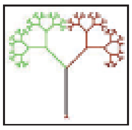
MODELLIERUNG

Modellierung ist das neue Zauberwort der Informatik-Didaktik. Erst die grosse Komplexität von Problemen macht eine Modellierung notwendig. Zusammenhänge aus dem Alltag werden als Abstrahierung der Wirklichkeit in Datenmodelle abgebildet. Dafür wurden eigene Modellierungs-sprachen entwickelt. In der Schule sollte jede Gelegenheit benützt werden, um auf einen Modellierungsvorgang hinzuweisen. Dazu eignet sich sowohl die Tabellenkalkulation (z.B. Lotto, Finanzpläne) wie auch die DGS (z.B. Wachstum, Schwerpunkt). Da oft mehrere Modelle möglich sind, ist die Diskussion über die Vor- und Nachteile der Vorschläge gewinnbringend.



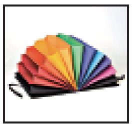
PROGRAMMIERKONZEPTE (Abfolge, Wiederholung, Auswahl)

Wenn man im Informatikunterricht von der Einführung einer Programmiersprache absehen möchte, ist es aber beim Einsatz einer Tabellenkalkulation wichtig, die Hinweise auf die verwendeten Programmierkonzepte (kopieren, SUMME, WENN usw.) nicht zu vergessen. Dasselbe gilt auch für eine dynamische Geometrie-Software.



REKURSION

Rekursion ist eine wichtige Problemlösestrategie. Meist ist die rekursive Lösung kompakter als die entsprechende iterative, benötigt aber mehr Speicherplatz.
Die rekursive Definition von Folgen (z.B. Fibonacci-Folge) ist auch in der Schule ein Thema und kann mit einer Tabellenkalkulation gut realisiert werden. Die Rekursion findet man sehr oft in der Erzeugung von Fraktalen.

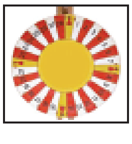


SORTIEREN

Effiziente Sortieralgorithmen sind ein Dauerbrenner, um die ständig wachsende Datenflut in den Griff zu bekommen. Typische Beispiele für das Ergebnis von Sortierungen sind das Telefonbuch und Enzyklopädien. Softwareprogramme (Textverarbeitung, Tabellenkalkulation) haben oft Sortierverfahren eingebaut.

SUCHEN

Suchmaschinen im Internet sind mächtige Werkzeuge, um Informationen zu finden. Das Erlernen von guten Suchstrategien ist ein Muss im Schulalltag.
Ein wichtiges Instrument, um die Lösung eines Problems zu finden, ist der binäre Baum, wie er z.B. bei der Bisektion (Halbierungsverfahren) eingesetzt wird.



ZUFALLSZAHLEN

Mit einem Zufallszahlengenerator sind Simulationen in verschiedenen Wissenschaften möglich geworden. Man unterscheidet vom Computer erzeugte Pseudozufallszahlen und echte Zufalls-zahlen aus bestimmten physikalischen Phänomenen. Das Prinzip der Monte-Carlo-Simulation ist bereits für die Sekundarstufe I zugänglich. In der Verschlüsselungstechnik (Kryptographie) sind echte Zufallszahlen unentbehrlich geworden, da sie nicht reproduzierbar sind.