Didaktischer Kommentar

1. Konzept dieser Fallstudie

Die Fallstudie "was zu beweisen war" möchte anregen, über folgende Punkte nachzudenken und allfällige Korrekturen im eigenen Unterricht vorzunehmen:

a) Argumentieren ist eine wichtige Fähigkeit, welche immer wieder in allen Schulfächern geübt werden sollte (Debatte).
Die Mathematik bietet für dieses Training ideale Voraussetzungen.
b) Beweisen ist auf verschiedenen Vorstufen und Niveaus möglich (vergl. das Reflektieren bei Freudenthal).
c) Beweisgespräche (Sprechübungen) helfen mit, die eigene Ueberzeugung andern klar mitzuteilen.
d) Ein Satz kann oft auf viele Arten bewiesen werden. Der Schüler soll lernen, die jeweilige Argumentationsbasis herauszuschälen und jene Beweise zu schätzen, bei welchen die Beweisidee klar zum Ausdruck kommt (Einsicht!).
Die "Mausefallenbeweise" von Euklid sind diesbezüglich keine Vorbilder.
e) Beweise sind keine Dramen in 3 Akten (Voraussetzung, Behauptung, Beweis), sondern können lehrreich und spannend sein.
f) Es ist notwendig zu wissen, wann ein Beweis als solcher akzeptiert wird, dh. welchen Spielregeln er genügen muss.
g) Beweise sind nicht dazu da, um das schlechte Gewissen des Lehrers zu beruhigen, sondern tragen wesentlich zum Verständnis eines Stoffes und der verwendeten Begriffe bei.
h) Es ist möglich, ein Gespür für Eleganz, Schönheit und Tiefe eines Beweises zu bekommen.
i) Beweisen ist eine eher unbeliebte Tätigkeit bei Schülern. Es muss daher viel für die Weckung des Beweisbedürfnisses getan werden.
k) Es gehört zur Technik des Beweisens, dass das Wesen von notwendigen und hinreichenden Bedingungen klar erkannt wird.
l) Beweisen wird durch Selbsttätigkeit gelernt und stellt eine ausgezeichnete Denkschulung dar.
m) Es gibt eine zeitgenössische "Beweisstrenge". Im Laufe der Geschichte haben sich die Auffassungen darüber geändert.
n) Beweise im Rechtswesen unterscheiden sich von den Beweisen in der Mathematik. Ein Vergleich fördert das Verständnis für die unterschiedlichen Auffassungen über die Sicherheit in den beiden Wissenschaften.
o) Die Ideen des direkten und indirekten Beweises, sowie des Schlusses von n auf n+1 sollten anhand von typischen Beispielen transparent gemacht werden.
p) Gemäss Polya gehört es zum Auftrag jedes Mathematiklehrers, in der Schule nicht nur demonstratives Schliessen, sondern ebensosehr plausibles Schliessen zu lehren.
q) Eine Konfrontation des Schülers mit fehlerhaften Beweisen oder offenen Beweissituationen (Mischung von richtigen und falschen Behauptungen usw.) schärft seine Kritikfähigkeit.
r) Es sollte für den Schüler zu einer Selbstverständlichkeit werden, dass

- ein Gegenbeispiel genügt, um eine mathematische Aussage als ungültig zu erklären
- in der Mathematik die Gültigkeit einer Aussage nicht darauf abgestützt werden kann, dass die Mehrheit der Anwesenden von ihrer Wahrheit überzeugt ist
- einzelne Beispiele, die eine Aussage bestätigen, nicht als Beweis für deren Gültigkeit dienen können.

s) In zahlreichen Schulbüchern wird die Notwendigkeit des Beweisens in der Mathematik damit motiviert, dass auf unsere Sinne kein Verlass ist. Es kommen dann haufenweise optische Täuschungen, welche diese These stützen sollen. Anderseits leben einige Schulfächer stark davon, dass der Schüler beobachten lernt und mit seinen Sinnen umzugehen in der Lage ist. Ein Herunterspielen der Fähigkeiten unserer Sinne in diesem Zusammenhang wäre kontraproduktiv. Es gibt andere Möglichkeiten, um dem Schüler die Notwendigkeit von Beweisen zu zeigen.
t) Die eingehende Beschäftigung mit den wichtigsten Grundlegungsversuchen der Mathematik vermag uns eine Antwort darüber zu geben, wieviel Ungewissheit am Ende noch bleibt. Aber auch, dass Mathematik ein lebendiges Gebilde ist, welches sich immerfort erneuert.

2. Durchführung

Die Fallstudie ist mit Absicht sehr offen gehalten. Lehrer und Schüler können ihre ganze Phantasie für die Gestaltung der Stunden einbringen.
Möglichkeiten für verschiedene Abschlussdramaturgien siehe „Abschlussdramaturgie pdf“.
Als Zeitpunkt der Durchführung der ganzen Fallstudie empfehlen sich die zwei Schuljahre vor der Matura. Eine solide Einbettung in den Unterricht hängt sehr stark von der Beweiskultur ab, welche in der betreffenden Klasse herrscht. Beweisen ist auf verschiedenen Stufen und Niveaus möglich. Daher sind Teile der Fallstudie bereits in unteren Klassen einsetzbar. Beweise tragen wesentlich zum Verständnis eines Stoffes und der verwendeten Begriffe bei. Dies sollen auch die Schülerinnen und Schüler erfahren.

3. Spezielle Hinweise

Im Rechtswesen unterscheidet man das Zivilrecht, Strafrecht und Verwaltungsrecht. Im Fallmaterial finden Sie nur einen Auszug aus dem Gesetz für die Zivilrechtspflege. Die beiden andern Gesetze enthalten wenig Neues zum Thema Beweis.
Das Römische Recht kannte keine langwierigen Beweisverfahren. In der Regel war der Schuldige bereits der Tat überführt und es galt nur noch, das Strafmass festzulegen.
Es gibt heute wenige Länder, wo der Angeklagte seine Unschuld beweisen muss.
Die Beweisaufgabe dieser Fallstudie stammt von der 28. Internationalen Mathematik-Olympiade in Havanna. Von diesem Wettbewerb wurden auch einige Beweisvorschläge ins Dokument 1 übernommen. Um die Teilnehmer in einem Land zu rekrutieren, werden vorgängig regionale und nationale Ausscheidungen durchgeführt. Dies hat eine grosse Breitenwirkung zur Folge. In harten Trainingslagern formt sich dann die Mannschaft. Die Schweiz nimmt an den Mathematik-Olympiaden auch teil.

4. Zitate

Einer muss behaupten, damit andere zu denken beginnen.

Ein durchgreifender Advokat in einer gerechten Sache, ein durchdringender Mathematiker vor dem Sternenhimmel erscheinen beide gleich gottähnlich. (Goethe)

Der einzige Beweis des Könnens ist das Tun. (M.v.Ebner-Eschenbach)

Auch ein in der Sprache der Mathematik geschriebener Beweis, bei dem alle Regeln des Schliessens und Rechnens getreulich eingehalten sind, braucht noch lange keine Mathematik im echten Sinne des Wortes zu sein. In der Ausdrucksweise der Mathematik selbst formuliert: Dafür, dass eine solche Komposition Mathematik ist, ist ihre logische Richtigkeit zwar notwendig aber keineswegs hinreichend. Es muss vielmehr das Analogon der musikalischen Schönheit und Dynamik hinzukommen. (H.Hasse)

Wenn ich nur erst die Sätze habe! Die Beweise werde ich schon finden. (B.Riemann)

Man muss einen mathematischen Satz erraten, bevor man ihn beweist. (G.Polya)

Ein Beweis ist nur ein Ueberprüfungsvorgang, den wir auf Anregungen unserer Intuition anwenden. (R.L.Wilder)

Zudem ist es ein Irrtum zu glauben, dass die Strenge in der Beweisführung die Feindin der Einfachheit sei. (D.Hilbert)

Die Mathematik ist ein buntes Gemisch von Beweistechniken. Und darauf beruht ihre mannigfache Anwendbarkeit und ihre Wichtigkeit. (L.Wittgenstein)

Der Zweck mathematischer Strenge ist, die Eroberungen der Intuition durch die Autorität der Logik zu bestätigen. (J.Hadamard)

Eine mathematische Wahrheit ist an sich weder einfach noch kompliziert, sie ist. (Émile Lemoine)

Seit man begonnen hat, die einfachsten Behauptungen zu beweisen, erwiesen sich viele von ihnen als falsch. (Bertrand Russell)

Von allen, die bis jetzt nach Wahrheit forschten, haben die Mathematiker allein eine Anzahl Beweise finden können, woraus folgt, daß ihr Gegenstand der allerleichteste gewesen sein müsse. (Rene Descartes)

Man kann beim Studium der Wahrheit drei Hauptziele haben: einmal, sie zu entdecken, wenn man sie sucht; dann: sie zu beweisen, wenn man sie besitzt; und zum letzten: sie vom Falschen zu unterscheiden, wenn man sie prüft. (Blaise Pascal)

Man kann der Wahrheit nicht mehr schaden als mit dem Bestreben, sie auf falschen Schlußfolgerungen aufzubauen. (P. L. M. de Maupertuis)

Das einzige Mittel, unsere Schlußfolgerungen zu verbessern, ist, sie ebenso anschaulich zu machen, wie es die der Mathematiker sind, derart, daß man seinen Irrtum mit den Augen findet und, wenn es Streitigkeiten unter Leuten gibt, man nur zu sagen braucht: "Rechnen wir!" ohne eine weitere Förmlichkeit, um zu sehen, wer recht hat. (G. W. Leibniz)

Seit der Zeit der Griechen bedeutet "Mathematik" zu sagen, "Beweis" zu sagen. (N. Bourbaki)

In der Mathematik gibt es keine Autoritäten. Das einzige Argument für die Wahrheit ist der Beweis. (K. Urbanik)

Mathematik allein befriedigt den Geist durch ihre außerordentliche Gewißheit. (Johannes Kepler)

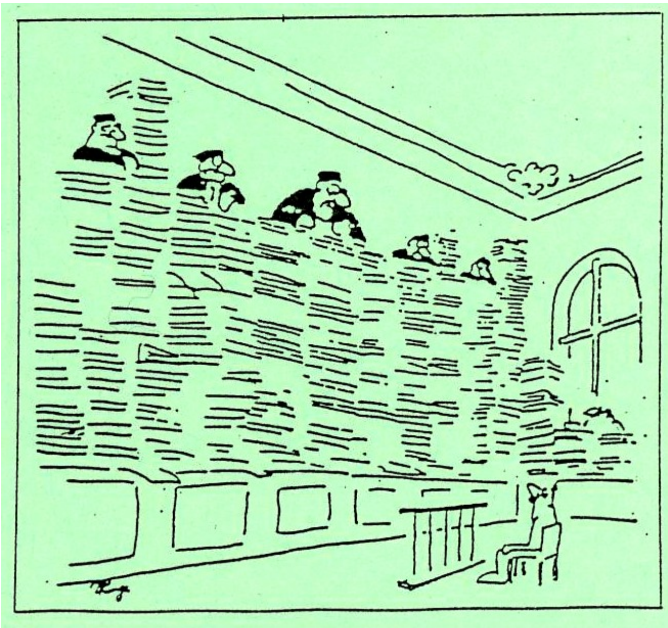
Alles muß bewiesen werden, und beim Beweisen darf man nichts außer Axiomen und früher bewiesenen Sätzen benutzen. (Blaise Pascal)

Ein Beweis, der nicht streng ist, ist nichts. (Henri Poincaré)

Seit man begonnen hat, die einfachsten Behauptungen zu beweisen, erwiesen sich viele von ihnen als falsch. (Sir Bertrand Russel)

5. Literatur

Bink E.: Probleme in offener Beweissituation. In: Didaktik der Mathematik, 2 (1987).
Dubnow J.S.: Fehler in geometrischen Beweisen. Berlin 1958 (VEB).
Fischer R. und Malle G.: Mensch und Mathematik. Mannheim 1985 (BI).
Freudenthal H.: Konstruieren, Reflektieren, Beweisen in phänomenologischer Sicht. In: xxx
Grabiner J.V.: Is mathematical truth time-dependent? In: xxx (1974).
Hardy G.H.: Mathematical Proof. In: Mind, 30 (1929).
Kautschitsch H. und Metzler W.: Anschauliches Beweisen. Stuttgart 1989 (Teubner).
Kirsch A.: Beispiele für „prämathematische“ Beweise. In: Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Bd.2 (1978).
Kleiner I.: Rigor and Proof in Mathematics: A Historical Perspective. In: Math. Mag. Vol. 64, 5, 1991
Kuster W.: Die gerichtliche Urteilsbegründung. Zürich 1980 (Schulthess).
Lakatos I.: Beweise und Widerlegungen. Braunschweig 1979 (Vieweg).
Naas J. und Tutschke W.: Grosse Sätze und schöne Beweise der Mathematik. Berlin 1986 (Akademie).
Noll P.: Strafprozessrecht. Zürich 1977 (Schulthess).
Pickert G.: Warum beweist man im Mathematikunterricht? In: Didaktik der Mathematik, 4 (1989).
Pickert G.: Die Bedeutung der Anschauung für den mathematischen Beweis. In: Der Mathematikunterricht, 4 (1957) Klett.
Polya G.: Vom Lösen mathematischer Aufgaben. 2 Bände. Basel 1966 (Birkhäuser).
Polya G.: Mathematik und plausibles Schliessen. 2 Bände. Basel 1962 (Birkhäuser).
Schneebeli H.R.: Geometrie von Fall zu Fall. Zürich 1991 (Sabe).
Szabo A.: Anfänge der griechischen Mathematik. München 1969 (Oldenbourg).
Tarski A.: Truth and proof. In: Sci.American 220 (1969).
Thiele R.: Mathematische Beweise. Thun 1979 (Harri Deutsch).
Van Dormolen J.: Learning to understand what giving a proof really means. In: Educational Studies in Mathematics. 8 (1977).
Winter H.: Zur Problematik des Beweisbedürfnisses. In: JMD 4 (1983).



GSOA, Nr.37