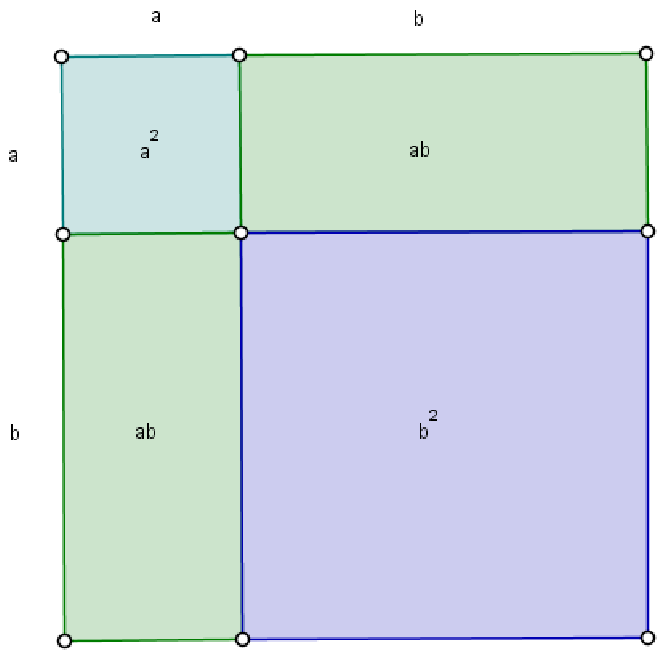
Descartes und sein arithmetischer Kalkül

Albert A. Gächter

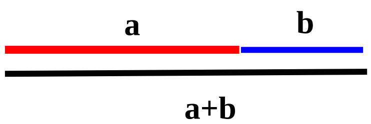
Zur Zeit der Griechen war die Geometrie die Königin der Mathematik. Es ist daher nicht verwunderlich, dass man eine geometrische Algebra schuf, wo versucht wurde, die grossartigen Erfolge der Geometrie auch für die Algebra zu nutzen. So interpretierte man a als Strecke, a^2 oder $a \cdot b$ als Fläche und a^3 als Volumen. Einfache algebraische Formeln konnten so sehr eindrücklich visualisiert werden.

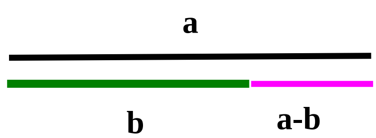


$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$

In einer Zeit, wo die Algebra immer stärker an Boden gewinnt, wählt auch René Descartes (1596-1650) die Geometrie als Basis für die Lösung algebraischer Probleme. Allerdings kommt es bei ihm zu einer innigeren Verbindung dieser zwei Disziplinen. Sein Werk *La Géométrie* (1637) beginnt mit einem Hammerschlag:
Alle Probleme der Geometrie können leicht auf einen solchen Ausdruck gebracht werden, dass es nachher nur der Kenntnis der Länge gewisser Linien bedarf, um diese Probleme zu konstruieren.
Es ist keine Rede mehr von Flächen und Volumina. Weil sich die gesamte Arithmetik nur aus vier oder fünf Operationen zusammensetzt, zeigt er zunächst für diese seine neue Streckenrechnung.

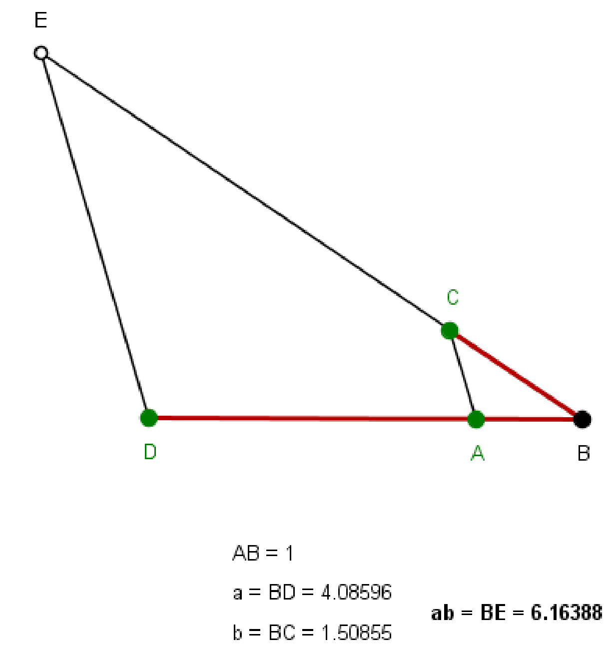
Addition und Subtraktion





Für die Multiplikation, Division und das Wurzelziehen führt er eine Einheit ein. Das Resultat ergibt sich als Verhältnis zwischen den gegebenen Strecken und der Einheit.

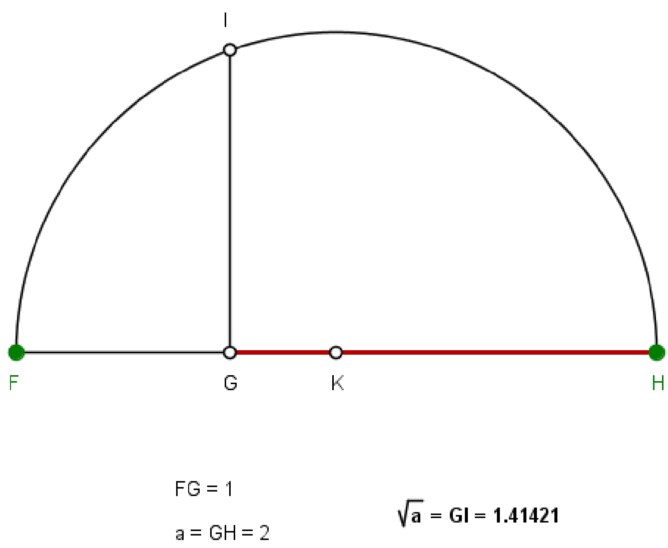
Multiplikation und Division



Begründe die Konstruktion!

Wie muss die nebenstehende Figur eingesetzt werden, um a durch b zu dividieren?

Quadratwurzelziehen



Begründung?

So ist z.B. a^2 eine Zahl und $a^3 = a \cdot a^2$ ebenfalls. Während die Griechen bei der Visualisierung von a^4 scheiterten, kann Descartes alle a^n als Zahlen interpretieren. Wer also mit Strecken umgehen kann, besitzt alles Notwendige, um geometrische Probleme zu lösen.

René Descartes, Geometrie, Wiss. Buchgesellschaft, Darmstadt, 1969

Erstes Buch.

Über Probleme, die mit alleiniger Anwendung von geraden Linien und Kreisen konstruiert werden können.

Alle Probleme der Geometrie können leicht auf einen solchen Ausdruck gebracht werden, daß es nachher nur der Kenntnis der Länge gewisser gerader Linien bedarf, um diese Probleme zu konstruieren.

Wie sich der arithmetische Kalkül auf die Operationen der Geometrie bezieht.

Und gleichwie sich die gesamte Arithmetik nur aus vier oder fünf Operationen zusammensetzt, nämlich aus den Operationen der Addition, der Subtraktion, der Multiplikation, der Division und des Ausziehens von Wurzeln, das ja auch als eine Art von Division angesehen werden kann: so hat man auch in der Geometrie, um die gesuchten Linien so umzuformen, daß sie auf Bekanntes führen, nichts anderes zu tun, als andere Linien ihnen hinzuzufügen oder von ihnen abzuziehen; oder aber, wenn eine solche gegeben ist, die ich, um sie mit den Zahlen in nähere Beziehung zu bringen, die Einheit nennen werde, und die gewöhnlich ganz nach Belieben angenommen werden kann, und man noch zwei andere hat, eine vierte Linie zu finden, die sich zu einer dieser beiden verhält, wie die andere zur Einheit, was dasselbe ist, wie die Multiplikation; oder aber eine vierte Linie zu finden, die sich zu einer der beiden verhält wie die Einheit zur anderen, was dasselbe ist wie die Division; oder endlich eine oder zwei oder mehrere mittlere Proportionalen[1]) zu finden zwischen der Einheit und irgendwelchen anderen Linien, was dasselbe ist wie das Ausziehen der Quadrat- oder Kubikwurzel usw. — Und ich werde mich nicht scheuen, diese der Arithmetik entnommenen Ausdrücke in die Geometrie einzuführen, um mich dadurch verständlicher zu machen.

Die Multiplikation.

Es sei z. B. (Fig. 1) AB die Einheit und es sei BD mit BC zu multiplizieren, so habe ich nur die Punkte A und C zu verbinden, dann DE parallel mit CA zu ziehen und BE ist das Produkt dieser Multiplikation.

Die Division.

Oder aber wenn man BE durch BD zu dividieren hätte, so wäre, nachdem die Punkte E und D verbunden

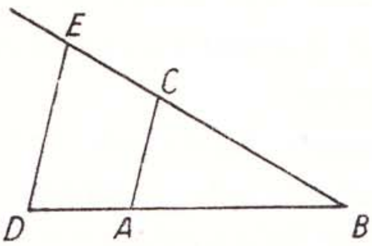


Fig. 1.

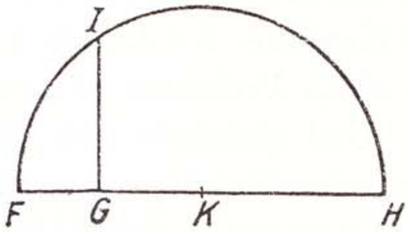


Fig. 2.

und AC parallel mit DE gezogen worden ist, BC das Resultat dieser Division.

Das Ausziehen der Quadratwurzel.

Soll endlich aus GH (Fig. 2) die Quadratwurzel ausgezogen werden, so füge ich zu GH in geradliniger Fortsetzung die Einheit FG hinzu, und beschreibe, nachdem ich FH im Punkte K in zwei gleiche Teile geteilt, um K als Mittelpunkt den Kreis FIH, errichte dann in G unter rechtem Winkel zu FH eine gerade Linie bis nach I, so ist GI die gesuchte Wurzel. Ich sage hier nichts über die Kubik- und anderen Wurzeln, da ich von diesen an späterer Stelle bequemer handeln kann.

Wie man sich in der Geometrie der Zahlzeichen bedienen kann.

Oftmals aber ist es gar nicht nötig, diese Linien so aufs Papier zu zeichnen, sondern es genügt, sie jede einzeln mit einem Buchstaben zu bezeichnen. — So nenne ich, um die Linie BD zu GH hinzuzufügen, die eine a, die andere b und schreibe $a+b$; und $a-b$, um b von a abzuziehen; und ab, um sie miteinander zu multiplizieren; und $\frac{a}{b}$, um a durch b zu dividieren; und aa oder a^2, um a mit sich selbst zu multiplizieren, und a^3, um dies noch einmal mit a zu multiplizieren und so bis ins Unendliche; und $\sqrt{a^2+b^2}$, um die Quadratwurzel aus a^2+b^2 auszuziehen; und $\sqrt[3]{a^3-b^3+abb}$[2]), um aus a^3-b^3+abb die Kubikwurzel auszuziehen, usw.

Hierbei ist zu bemerken, daß ich unter a^2 oder b^3 oder dergleichen gewöhnlich nur einfache Linien[3]) verstehe, und daß ich nur, um mich der in der Algebra gebrauchten Bezeichnungen zu bedienen, dieselben als Quadrate, Kuben usw. benenne.

Es ist auch hervorzuheben, daß sich, wenn in der Aufgabe die Einheit nicht festgelegt ist, alle Teile einer und derselben Linie durch Ausdrücke von gleicher Dimension darstellen müssen, so wie hier a^3, abb und b^3, aus denen sich die Linie zusammensetzt, die ich $\sqrt[3]{a^3-b^3+abb}$ genannt habe; dies braucht aber nicht der Fall zu sein, wenn die Einheit bestimmt gegeben ist, da diese alsdann immer mit darunter verstanden werden kann, wo die Dimension zu hoch oder zu niedrig ist. Hat man etwa aus a^2b^2-b die Kubikwurzel auszuziehen, so muß man sich die Größe a^2b^2 einmal durch die Einheit dividiert und die andere Größe b zweimal mit der Einheit multipliziert denken.